

Crecimiento en altura dominante de *Pinus patula* Schiede ex Schltdl. & Cham. y *Abies religiosa* (Kunth) Schltdl. & Cham. de Puebla, México

Título corto: Altura dominante de dos coníferas de Puebla

Abel J. Hernández-Martínez^{1*} (<https://orcid.org/0000-0002-4489-8997>)

Valentín J. Reyes-Hernández¹ (<https://orcid.org/0000-0002-1804-412X>)

Alejandro Velázquez-Martínez¹ (<https://orcid.org/0000-0001-5560-9292>)

Héctor M. De los Santos-Posadas¹ (<https://orcid.org/0000-0003-4076-5043>)

Armando Gómez-Guerrero¹ (<https://orcid.org/0000-0002-7261-1279>)

Vidal Guerra-de la Cruz² (<https://orcid.org/0000-0003-1186-718X>)

¹Colegio de Postgraduados, Posgrado en Ciencias Forestales. Carretera México-Texcoco km 36.5. C. P. 56230. Montecillo, Texcoco, Estado de México, México.

²Instituto Nacional de Investigaciones Forestales, Agrícolas y Pecuarias (INIFAP), Sitio Experimental Tlaxcala. Carretera Tlaxcala-Santa Ana Chiautempan km 2.5, Colonia Industrial. C. P. 90800. Tlaxcala, México.

* Autor para correspondencia: ajhmtz@gmail.com

Resumen

Introducción. La estimación del potencial productivo del sitio es clave en el manejo forestal. El índice de sitio (IS) y el crecimiento de altura dominante (AD) son herramientas que permiten clasificar la productividad de rodales.

Objetivo. Ajustar modelos de AD e IS para *Pinus patula* Schiede ex Schltdl. & Cham. y *Abies religiosa* (Kunth) Schltdl. & Cham. en bosques naturales con manejo forestal en el estado de Puebla, México.

Métodos. Se utilizaron 179 parcelas permanentes de muestreo que cubrieron condiciones distintas de edad, densidad y manejo forestal. Se obtuvieron 422 y 153 pares de datos AD-Edad de árboles de *P. patula* y *A. religiosa*, respectivamente. El enfoque de diferencia algebraica (EDA) y diferencia algebraica generalizada (EDAG) se utilizaron para reparametrizar los modelos de Bailey-Clutter, Chapman-Richards, Hossfeld-IV y Levakovic-II. El método de variable *dummy* y la técnica de mínimos cuadrados generalizados se usaron en el ajuste y los modelos se compararon mediante un sistema de calificación con cinco indicadores estadísticos.

Resultados. Los parámetros estimados con el EDA fueron significativos ($P < 0.05$) y algunos parámetros del EDAG no lo fueron ($P > 0.05$). El sistema de calificación mostró que los modelos polimórficos (EDA) de Hossfeld IV y Chapman-Richards tuvieron los mejores indicadores estadísticos para *P. patula* y *A. religiosa*, respectivamente. Las trayectorias de IS de los dos modelos cubrieron satisfactoriamente las observaciones de las parcelas permanentes de muestreo.

Conclusiones. Los modelos desarrollados permiten estimar el crecimiento de AD y clasificar el potencial productivo de los rodales con mezcla de especies, lo cual contribuye a mejorar la planificación del manejo forestal.

Palabras clave: índice de sitio, diferencia algebraica, modelos de crecimiento, rodales mezclados, variable *dummy*.

Recibido: 29 de enero de 2026

Aceptado: 25 de agosto de 2026

Introducción

La aplicación de tratamientos silvícolas en el manejo forestal requiere estimaciones de la productividad del rodal (Cieszewski & Strub, 2018) y conocimiento de su dinámica de crecimiento y rendimiento (Seki & Sakici, 2017), lo cual permite que el silvicultor programe tratamientos de acuerdo con el potencial productivo del bosque (Özçelik et al., 2019). En este sentido, es indispensable contar con datos de parcelas de muestreo permanente (Tarmu et al., 2020), de tal forma que se tengan escenarios de las etapas de desarrollo del rodal (Seki & Sakici, 2017).

La productividad de rodales puede inferirse con la calidad de estación al relacionar un conjunto de atributos del rodal de forma cualitativa (Koirala et al., 2021; Zeoli et al., 2025) o con el índice de sitio (IS) que evalúa la calidad del rodal a través del crecimiento en altura dominante (AD) (Özçelik et al., 2019). El IS es más práctico para estimar el potencial productivo de un rodal (Salas-Eljatib, 2020), por la correlación directa entre la calidad del sitio y el crecimiento en altura de árboles dominantes (Seki & Sakici, 2017).

Existen tres enfoques para el desarrollo de modelos de crecimiento en AD e IS (Kahrman et al., 2018): curva guía, ecuaciones de diferencia algebraica y predicción de parámetros; el segundo es el de mayor uso bajo el enfoque de diferencia algebraica (EDA) (Bailey & Clutter, 1974) y diferencia algebraica generalizada (EDAG) (Cieszewski & Bailey, 2000). EDA y EDAG generan ecuaciones dinámicas de IS y proporcionan patrones de crecimiento realistas, con propiedades de invarianza (transitividad) en la edad base y con la capacidad de obtener las mismas estimaciones a cualquier edad base (Cieszewski & Strub, 2018).

La Unidad de Manejo Forestal Chignahuapan-Zacatlán (UMAFOR 2108) se localiza en la Sierra Norte de Puebla, México y tiene potencial alto de producción forestal (Barrón, 2021). En esta región, *Pinus patula* Schiede ex Schltdl. & Cham. es la especie más comercial con respecto a *Abies religiosa* (Kunth) Schltdl. & Cham. (Valdez-Lazalde &

Lynch, 2000). En la UMAFOR 2108 se generaron herramientas biométricas para algunas especies forestales y forman parte del Sistema Biométrico Forestal de México (SiBiFor, <http://fcfposgrado.ujed.mx/sibifor/inicio/>). No obstante, aunque el SiBiFor tiene ecuaciones regionales para modelar el crecimiento en AD e IS de *P. patula* para la UMAFOR 2108 (Vargas-Larreta et al., 2017), en ocasiones, un modelo construido a gran escala no cubre la variabilidad de condiciones climáticas, edáficas, ecológicas y de manejo forestal que influyen en el crecimiento de las especies (Socha et al., 2021).

El objetivo del presente estudio fue generar modelos dinámicos locales de crecimiento en AD e IS para clasificar la productividad potencial de los rodales de *P. patula* y *A. religiosa* en Aquixtla, Puebla. Se plantearon las hipótesis siguientes: i) un modelo de crecimiento en AD desarrollado en condiciones de mezcla de especies con dominancia en área basal de *P. patula* o *A. religiosa* proyecta la AD a nivel de totalidad de rodal y ii) el modelo de IS desarrollado para ambas especies permite clasificar el potencial productivo del sitio en rodales mezclados.

Materiales y métodos

Área de estudio

La investigación se realizó en la Reserva Forestal Multifuncional 'El Manantial' S. C., ubicada en Aquixtla e Ixtacamaxtitlán, Puebla, México (**Figura 1**), la cual pertenece a la UMAFOR 2108. La reserva tiene una superficie forestal de 278 ha y se localiza entre las coordenadas 19° 42' 27.4" – 19° 44' 37.6" N y 98° 00' 43.9" – 98° 58' 56.5 O en un intervalo altitudinal de 2 650 a 3 178 m. El clima es templado húmedo con temperatura

media anual de 18 °C y precipitación media anual de 1 000 mm. Los suelos predominantes son de tipo Andosol (Castaños-Martínez & Castro-Zavala, 2014).

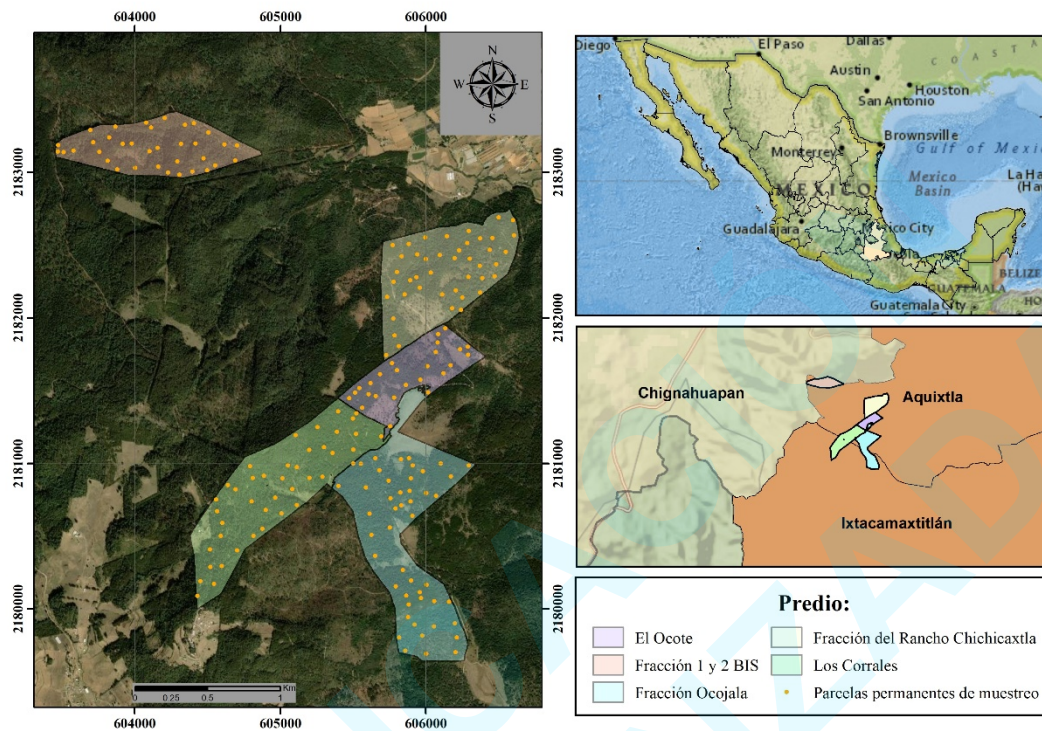


Figura 1. Ubicación geográfica de la Reserva Forestal Multifuncional ‘El Manantial’ y distribución espacial de las parcelas permanentes de muestreo.

En el sitio dominan *P. patula* y *A. religiosa* en área basal con mezclas de ambas especies en diferentes proporciones y con otras menos abundantes como *Pinus teocote* Schltdl. & Cham., *Pinus rudis* Lindl., *Pinus ayacahuite* Ehrenb., *Pinus montezumae* Lamb., *Pinus pseudostrobus* Lindl. y algunas latifoliadas (Castaños-Martínez & Castro-Zavala, 2014).

El área se encuentra bajo manejo forestal con el Método de Desarrollo Silvícola (MDS) y el Sistema de Cortas Sucesivas de Protección (SICOSUP); el primero se aplica en altitudes menores de 3 000 m y el segundo por arriba de los 3 000 m. Las áreas con MDS y SICOSUP se administran con el enfoque de manejo forestal de rotación y con los métodos de regeneración de árboles semilleros y cortas sucesivas, respectivamente (Castaños-Martínez & Castro-Zavala, 2014).

Registro de datos

Los datos provienen de dos periodos de establecimiento de parcelas permanentes de muestreo (PPM), las cuales cubrieron diferentes condiciones ecológicas, de manejo forestal, densidad y edades. El primero consistió en 103 PPM establecidas en 2008 en sitios con dominancia de *P. patula* y *A. religiosa* en área basal, las cuales se remidieron tres veces cada dos años; en algunos casos solo existe una remedición (Cuadro 1). El segundo consistió en 190 PPM establecidas entre 2018 a 2023 y remedidas cada dos años; algunas mostraron una mezcla de las dos especies bajo estudio. Las PPM donde no dominaron *P. patula* o *A. religiosa* se excluyeron del análisis; además, solo se consideraron las que tuvieran más de dos mediciones, lo cual resultó en 76 PPM. Al final se obtuvo un total de 179 PPM; *P. patula* dominó en 128 y *A. religiosa* en 51 (Cuadro 1).

Cuadro 1. Número de parcelas permanentes de muestreo (PPM) establecidas por fuente, especie y número de mediciones en la Reserva Forestal Multifuncional 'El Manantial', Puebla, México.

Especie	Periodo de establecimiento	Número de mediciones*			Total de PPM
		4	3	2	
<i>Pinus patula</i>	2008-2014	77	-	2	79
	2018-2023	-	12	37	49
<i>Abies religiosa</i>	2008-2014	23	-	1	24
	2018-2023	-	5	22	27

La forma de las PPM fue circular. En el primer periodo de establecimiento, las PPM midieron 300 m² en rodales menores de 15 años y 600 m² en rodales mayores de 15 años; en el segundo periodo, midieron 600 m². En todas las PPM se midieron el diámetro normal (cm) y la altura total (m) de los árboles.

En cada PPM se seleccionaron de tres a cinco árboles dominantes o codominantes y se les extrajo un núcleo de madera con un taladro de Pressler® a la altura del diámetro

normal, para contar los anillos de crecimiento. El promedio del conteo de anillos fue la edad de la PPM (E, años). La AD de la parcela fue el promedio de las alturas de los árboles muestreados. Se consideraron 422 y 157 pares de datos AD-E para *P. patula* y *A. religiosa*, respectivamente (**Cuadro 2**).

Cuadro 2. Estadísticos descriptivos de altura dominante (AD) y edad para las dos especies de estudio en la Reserva Forestal Multifuncional ‘El Manantial’, Puebla, México.

Especie	Variable	n	Mínimo	Media	Máximo	Desviación estándar
<i>Pinus patula</i>	AD (m)	422	4.7	18.4	39.6	5.9
	Edad (años)	422	7.0	22.4	77.0	9.8
<i>Abies religiosa</i>	AD (m)	157	12.2	24.4	38.1	5.5
	Edad (años)	157	11.0	34.6	59.0	9.1

Modelos de altura dominante e índice de sitio

Se seleccionaron cuatro modelos base de crecimiento: Bailey-Clutter, Chapman-Richards, Hossfeld IV y Levakovic II (Özçelik et al., 2019; Seki & Sakici, 2017; Trim et al., 2020), los cuales se reparametrizaron con el EDA (Bailey & Clutter, 1974) y el EDAG (Cieszewski & Bailey, 2000) con el procedimiento de Hipler et al. (2021) para obtener el modelo dinámico de AD como en la Ecuación 1.

$$AD_2 = f(AD_1, E_1, E_2; \chi, \beta) + \varepsilon \quad \text{Ec. 1}$$

Donde,

AD_2 = crecimiento de altura dominante en E_2

AD_1 = altura dominante observada en E_1

χ = función relacionada con el sitio

β = vector de parámetro globales

ϵ = error aleatorio.

La diferencia entre el EDA y el EDAG radica en el número de parámetros relacionados con χ ; cuando se seleccionó un parámetro se trató del EDA (Bailey & Clutter, 1974) y cuando se relacionaron dos parámetros se consideró un EDAG (Cieszewski & Bailey, 2000). Se derivaron ocho modelos dinámicos de crecimiento de AD (**Cuadro 3**): cuatro polimórficos bajo el EDA (M1, M3, M5 y M7) y cuatro polimórficos con asíntotas variables con el EDAG (M2, M4, M6 y M8).

1 **Cuadro 3.** Modelos de crecimiento base de altura dominante y reparametrización con el enfoque de diferencia algebraica
2 (EDA: M1, M3, M5 y M7) y diferencia algebraica generalizada (EDAG: M2, M4, M6 y M8).

Modelo base	Parámetro relacionado con el sitio (χ)	Solución para χ_0 en su condición inicial (AD_1, E_1)	Ecuación dinámica	Modelo
Bailey y Clutter:	$\alpha_2 = \chi$	$\chi_0 = \frac{\ln \left[\frac{\ln(AD_1) - \beta_0}{\beta_1} \right]}{\ln(E_1)}$	$AD_2 = e^{\left(\frac{\ln \left[\frac{\ln(AD_1) - \beta_0}{\beta_1} \right]}{\beta_0 + \beta_1 E_2} \right)}$	M1
$AD = e^{\alpha_0 + \alpha_1 E^{\alpha_2}}$	$\alpha_0 = \beta_0 + \chi$ $\alpha_1 = \beta_1 \chi$	$\chi_0 = \frac{\ln(AD_1) - \beta_0}{1 + \beta_1 E_1^{\beta_2}}$	$AD_2 = e^{\beta_0 + \chi_0 + \beta_1 \chi_0 E_2^{\beta_2}}$	M2
Chapman-Richards:	$\alpha_2 = \chi$	$\chi_0 = \frac{\ln \left(\frac{AD_1}{\beta_0} \right)}{\ln(1 - e^{-\beta_1 E_1})}$	$AD_2 = \beta_0 (1 - e^{-\beta_1 E_2})^{\frac{\ln \left(\frac{AD_1}{\beta_0} \right)}{\ln(1 - e^{-\beta_1 E_1})}}$	M3
$AD = \alpha_0 (1 - e^{-\alpha_1 E})^{\alpha_2}$	$\alpha_0 = e^\chi$ $\alpha_2 = \beta_1 + \frac{\beta_2}{\chi}$	$\chi_0 = 0.5(\ln(AD_1) - \beta_1 L_0 + R_0)$ $R_0 = \sqrt{(\ln(AD_1) - \beta_1 L_0)^2 - 4\beta_2 L_0}$ $L_0 = \ln(1 - e^{-\beta_0 E_1})$	$AD_2 = AD_1 \left(\frac{1 - e^{-\beta_0 E_1}}{1 - e^{-\beta_0 E_2}} \right)^{\beta_1 + \frac{\beta_2}{\chi_0}}$	M4
Hossfeld IV:	$\alpha_0 = \chi$	$\chi_0 = \frac{E_1^{\beta_2}}{AD_1} - \beta_1 E_1^{\beta_2}$	$AD_2 = \frac{E_2^{\beta_2}}{\frac{E_1^{\beta_2}}{AD_1} + \beta_1 E_1^{\beta_2} + \beta_1 E_2^{\beta_2}}$	M5
$AD = \frac{E^{\alpha_2}}{\alpha_0 + \alpha_1 E^{\alpha_2}}$	$\alpha_0 = \beta_0 + \beta_1 \chi$ $\alpha_1 = \chi$	$\chi_0 = \frac{\frac{E_1^{\beta_2}}{AD_1} - \beta_0}{\beta_1 + E_1^{\beta_2}}$	$AD_2 = \frac{E_2^{\beta_2}}{\beta_0 + \beta_1 \chi_0 + \chi_0 E_2^{\beta_2}}$	M6

Levakovic II:	$\alpha_1 = \chi$	$\chi_0 = \frac{E_1}{e^{\left(\frac{\ln\left(\frac{AD_1}{\beta_0}\right)}{\beta_2}\right)}} - E_1$	$AD_2 = \beta_0 \left(E_1 \left(\left(\frac{E_1}{e^{\left(\frac{\ln\left(\frac{AD_1}{\beta_0}\right)}{\beta_2}\right)}} - E_1 \right) + E_1 \right)^{-1} \right)^{\beta_2}$	M7
$y = \alpha_0 \left(\frac{E}{\alpha_1 + E} \right)^{\alpha_2}$	$\alpha_0 = e^{\chi}$ $\alpha_2 = \frac{\beta_2}{\chi}$	$\chi_0 = \frac{\ln(AD_1) + \sqrt{(-\ln(AD_1))^2 - 4\beta_2 \ln\left(\frac{E_1}{\beta_1 + E_1}\right)}}{2}$	$AD_2 = e^{\chi_0} \left(\frac{E_2}{\beta_1 + E_2} \right)^{\frac{\beta_2}{\chi_0}}$	M8

3 AD = altura dominante; E = edad; AD_1 y AD_2 = altura dominante en la edad E_1 y E_2 , respectivamente; α_i = parámetros del modelo base; β_i = parámetros de los
4 modelos dinámicos de AD ; $\ln$ = logaritmo natural; e = función exponencial.

Ajuste y evaluación estadística de modelos

Los modelos se ajustaron con variables *dummy* para estimar simultáneamente parámetros fijos locales y globales (Cieszewski et al., 2000) e indicar parámetros únicos al asignar la altura inicial de una parcela por ser específica del sitio (Nigh, 2015). Este enfoque requiere al menos dos mediciones por parcela y el número de parcelas debe ser mayor que el número de parámetros globales del modelo (Wang et al., 2020). Las variables *dummy* se integraron en el parámetro local de la función AD_{ij} (Wang et al., 2020) y su expresión se representa en la Ecuación 2.

$$AD_{ij} = f(E_{ij}, E_b; As, \beta) + \varepsilon_{ij}$$

$$As = \sum_{i=1}^N As_i d_i; \quad i = 1, 2, \dots, N \quad \text{Ec. 2}$$

Donde,

AD_{ij} = altura dominante de la i -ésima parcela en la j -ésima observación a una edad E_{ij}

E_b = edad base

As = vector de parámetros locales

β = vector de parámetros globales

ε_{ij} = error aleatorio de la i -ésima parcela en la j -ésima observación

As_i = altura en la i -ésima parcela

d_i = variable *dummy* por parcela que es igual a 1 para la i -ésima parcela y 0 de otra forma

N = número total de parcelas con sus respectivas observaciones (n_i).

El método de variable *dummy* utilizó todos los datos en el ajuste y se realizó con mínimos cuadrados generalizados no lineales con la función 'gnls' (Pinheiro et al., 2023) del paquete estadístico R (R Development Core Team, 2024). El estadístico de Durbin-Watson (DW) se usó para detectar posible autocorrelación; si DW es cercano a 2 no existe autocorrelación (Trim et al., 2020). La heterocedasticidad se evaluó mediante inspección gráfica de ϵ_{ij} y $\widehat{AD}_{ij}$ y la normalidad con la prueba de Kolmogorov-Smirnov ($\alpha = 0.05$).

La significancia de los parámetros se evaluó con la prueba *t-student* ($\alpha = 0.05$). Los modelos se compararon con base en cinco indicadores: raíz del cuadrado medio del error (RCME), coeficiente de determinación ajustada (R^2_a), criterio de información de Akaike (AIC), sesgo promedio absoluto (sesgo) y el índice de ajuste (IA). La RCME cuantifica el error medio, R^2_a evaluó la precisión del modelo, el AIC midió la bondad de ajuste y el sesgo absoluto representó las desviaciones promedio de AD_{ij} y $\widehat{AD}_{ij}$ (Seki & Sakici, 2017).

El IA midió la proporción de la varianza que explica el modelo y es similar a R^2 . Tiene la particularidad de que $\hat{A}_{ij}$ en la i -ésima parcela de su j -ésima observación, cuando $j = n_i$, fue el IS observado de cada parcela y se consideró el punto de referencia. Las demás observaciones de cada parcela se estimaron con su propia función de $IS = f(A_{ij}, E_b, E_{ij}; \hat{\beta})$ manteniendo fijo el valor de $E_b = E_{ij}$ cuando $j = n_i$.

$$RCME = \sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} \frac{(AD_{ij} - \widehat{AD}_{ij})^2}{(n_1 + n_2 + \dots + n_N) - p}} \quad \text{Ec. 3}$$

$$R^2_a = 1 - \frac{\sum_{i=1}^N n_i - 1}{\sum_{i=1}^N n_i - p} \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} (AD_{ij} - \widehat{AD}_{ij})}{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} (AD_{ij} - \overline{AD}_{ij})} \quad \text{Ec. 4}$$

$$AIC = \sum_{i=1}^N n_i \hat{\sigma}^2 + 2p \quad \text{Ec. 5}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} \frac{(AD_{ij} - \widehat{AD}_{ij})^2}{(n_1 + n_2 + \dots + n_N) - p}$$

$$Sesgo = \frac{|\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} (AD_{ij} - \widehat{AD}_{ij})|}{(n_1 + n_2 + \dots + n_N)} \quad \text{Ec. 6}$$

$$IA = 1 - \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} (AD_{ij} - \widehat{AD}_{ij})^2}{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} (AD_{ij} - \overline{AD}_{ij})^2} \quad \text{Ec. 7}$$

45 Donde AD_{ij} , $\widehat{AD}_{ij}$ y $\overline{AD}_{ij}$ son el valor observado, estimado y promedio de altura dominante,
 46 $\hat{\sigma}^2$ es la varianza del error estimada y p el número de parámetros del modelo.

47 Debido a la cantidad limitada de datos no se aplicó un procedimiento de validación. En
 48 su lugar se empleó el método de *ranking* relativo (RR) propuesto por Poudel y Cao (2013),
 49 para cada modelo con los indicadores estadísticos. El RR posiciona, de manera exacta,
 50 el estadístico del modelo respecto a los otros modelos (Trim et al., 2020). El RR para el
 51 RCME, AIC y sesgo se obtuvo con la Ecuación 8 y para R^2_a e IA con la Ecuación 9:

$$RR_i = 1 + \left(\frac{(w-1)(S_i - S_{\min})}{S_{\max} - S_{\min}} \right) \quad \text{Ec. 8}$$

$$RR_i = 1 + \left(\frac{(w-1)(S_{\max} - S_i)}{S_{\max} - S_{\min}} \right) \quad \text{Ec. 9}$$

52 donde, w es el número de modelos utilizados en la prueba, S_i es el valor del estadístico y
 53 $S_{\min}$ y $S_{\max}$ son los valores máximos y mínimos de los estadísticos. El valor menor de la
 54 suma de los RR de cada estadístico fue la mejor calificación. Con el modelo seleccionado
 55 se graficaron las curvas de IS y crecimiento de AD a una edad base de 40 años, que es
 56 cercana al turno de ambas especies (Kahrman et al., 2018). Se utilizaron tres IS para
 57 clasificar la productividad potencial en baja, intermedia y alta, y se sobrepusieron con las
 58 observaciones.

59

Resultados

Los parámetros de los modelos ajustados para *P. patula* fueron, en su mayoría, estadísticamente significativos ($P < 0.05$), con excepción de cuatro parámetros correspondientes a los modelos M4 y M6 bajo el enfoque EDAG. Para *A. religiosa*, los parámetros de los modelos EDA fueron significativos ($P < 0.05$); sin embargo, al menos un parámetro de EDAG no fue significativo ($P > 0.05$) (Cuadro 4). En general, los modelos EDA fueron superiores en los estadísticos de los parámetros que EDAG.

Los modelos obtuvieron valores altos de R^2_a ($>98\%$) (Cuadro 4), acorde también con los valores bajos del sesgo absoluto. La RCME fue baja con valores menores para *A. religiosa* (0.43 m a 0.48 m) que para *P. patula* (0.64 m a 0.66 m). En términos del AIC, los resultados fueron similares entre modelos por especie.

Los valores del IA fueron menores que el R^2_a , debido a que el primero explica la variación retrospectiva a partir de un punto de referencia del IS en la observación actual de cada parcela. El IA de los modelos de *P. patula* explicaron de 81 a 87 % de la variación de las observaciones, mientras que el IA para *A. religiosa* fue de 91 a 93 %.

El estadístico DW de todos los modelos estuvo cercano a 2 pero ligeramente superior, lo cual indica una posible autocorrelación negativa en los residuales. En un análisis preliminar, los modelos se evaluaron con una estructura de autocorrelación (*i. e.*, un autorregresivo de orden 1 – AR1), lo cual aumentó el valor de DW (resultados no mostrados), por tal razón no se integró una estructura de autocorrelación.

Cuadro 4. Parámetros estimados, error estándar (entre paréntesis) y evaluación estadística de ocho modelos de crecimiento de altura dominante de *Pinus patula* y *Abies religiosa* con el enfoque de diferencia algebraica (M1, M3, M5 y M7) y diferencia algebraica generalizada (M2, M4, M6 y M8).

Especie	Modelo	β_0	β_1	β_2	RCME	AIC	Sesgo	R^2_a	IA	DW
---------	--------	-----------	-----------	-----------	------	-----	-------	---------	----	----

absoluto										
<i>P. patula</i>	M1	4.416 (0.197)	-8.573 (0.704)	-	0.655	947.6	0.0008	0.988	0.873	2.540
<i>P. patula</i>	M2	4.042 (0.215)	-13.216 (6.619)	-0.5 (0.07)	0.642	931.1	0.0006	0.988	0.837	2.483
<i>P. patula</i>	M3	42.90 (3.216)	0.035 (0.005)	-	0.650	940.8	0.001	0.988	0.818	2.462
<i>P. patula</i>	M4	0.044 (0.006)	-11.956* (7.759)	48.866* (28.296)	0.646	936.6	0.0004	0.988	0.835	2.495
<i>P. patula</i>	M5	-	0.022 (0.002)	1.482 (0.076)	0.642	930.3	0.0002	0.988	0.855	2.517
<i>P. patula</i>	M6	22.771* (16.594)	-952.506* (731.777)	1.443 (0.074)	0.642	930.4	0.0004	0.988	0.850	2.507
<i>P. patula</i>	M7	57.245 (4.25)	-	2.051 (0.321)	0.642	930.3	0.0003	0.988	0.853	2.512
<i>P. patula</i>	M8	-	19.934 (6.124)	7.426 (0.952)	0.657	949.2	0.0009	0.987	0.872	2.548
<i>A. religiosa</i>	M1	4.855 (0.556)	-6.566 (0.666)	-	0.479	252.1	0.0001	0.992	0.929	2.540
<i>A. religiosa</i>	M2	3.911 (0.195)	-4.015* (2.587)	-0.289 (0.127)	0.443	228.6	0.0001	0.993	0.905	2.618
<i>A. religiosa</i>	M3	48.427 (6.434)	0.02 (0.006)	-	0.439	225.2	0.0001	0.993	0.904	2.613
<i>A. religiosa</i>	M4	0.021 (0.008)	-67.281* (287.675)	263.091* (1114.538)	0.441	227.1	0.0001	0.993	0.905	2.608
<i>A. religiosa</i>	M5	-	0.017 (0.003)	1.125 (0.129)	0.454	235.3	0.0001	0.993	0.920	2.578
<i>A. religiosa</i>	M6	1.505* (0.951)	-65.933* (42.782)	0.919 (0.12)	0.452	210.5	0.0111	0.993	0.914	2.619
<i>A. religiosa</i>	M7	64.232 (8.928)	-	1.186 (0.248)	0.454	235.5	0.0001	0.993	0.920	2.583
<i>A. religiosa</i>	M8	-	87.261* (61.779)	4.117 (0.531)	0.465	242.5	0.0004	0.992	0.925	2.655

*Parámetro no significativo ($P > 0.05$), β_i = parámetros estimados, RCME = raíz del cuadrado media del error, AIC = criterio de información de Akaike, R^2_a = coeficiente de determinación ajustada, IA = índice de ajuste, DW = valor del estadístico de Durbin-Watson.

Conforme a los RR de los modelos y considerando la significancia de los parámetros, el M5 de *P. patula* obtuvo mejor calificación (menores RCME, AIC, sesgo absoluto y mayor R^2_a) y ocupó el tercer lugar en el IA (Cuadro 5). Por lo tanto, el M5 obtuvo el mejor *ranking* y se seleccionó para realizar estimaciones de AD e IS para *P. patula*.

Para *A. religiosa*, el modelo M3 presentó los valores más bajos de RCME, sesgo absoluto y R^2_a , pero el AIC ocupó el segundo lugar. Respecto al IA, el M3 obtuvo la menor calificación respecto a los otros modelos (Cuadro 5). La variación del menor y mayor valor entre los modelos de este estadístico fue en un intervalo de 2 % (Cuadro 4), por lo que M3 se seleccionó como el mejor modelo de AD e IS para oyamel.

Cuadro 5. Calificación y evaluación de ocho modelos de altura dominante con el enfoque de diferencia algebraica (EDA: M1, M3, M5 y M7) y diferencia algebraica generalizada (EDAG: M2, M4, M6 y M8), para seleccionar el mejor modelo de *Pinus patula* y *Abies religiosa*.

Especie	Modelo	Ranking relativo				Ranking	
		RCME	AIC	Sesgo	R^2_a	IA	aditivo
<i>Pinus patula</i>	M1	7.389	7.392	6.250	6.833	1.000	28.065
	M2	1.235	1.321	4.500	1.000	5.609	9.178
	M3	4.946	4.89	8.000	4.500	8.000	23.937
	M4	3.208	3.331	2.750	3.333	5.786	13.779
	M5	1.141	1.024	1.000	1.000	3.304	4.826
	M6	1.000	1.050	2.750	1.000	3.980	6.596
	M7	1.141	1.000	1.875	1.000	3.502	5.716
	M8	8.000	8.000	7.125	8.000	1.136	31.352
<i>Abies religiosa</i>	M1	8.000	8.000	1.063	8.000	1.000	25.263
	M2	1.73	4.043	1.000	2.000	7.578	10.289
	M3	1.000	3.478	1.000	1.000	8.000	8.078
	M4	1.365	3.798	1.063	1.500	7.737	9.274
	M5	3.553	5.176	1.063	3.500	3.534	13.999
	M6	3.171	1.000	8.000	3.000	5.015	16.174

M7	3.605	5.212	1.063	3.500	3.469	14.075
M8	5.447	6.391	1.252	5.500	1.936	18.977

RCME = raíz del cuadrado medio del error, AIC = criterio de información de Akaike, R^2_a = coeficiente de determinación ajustada, IA = índice de ajuste.

Los modelos seleccionados de tipo polimórfico corresponden a las funciones de Hossfeld IV y Chapman-Richards para *P. patula* y *A. religiosa*, respectivamente. Estos mostraron un patrón aleatorio en los errores respecto a los valores predichos sin tendencia significativa de heterocedasticidad (Figura 2). La prueba de Kolmogorov-Smirnov con valores $P = 0.25$ y $P = 0.82$ para *P. patula* y *A. religiosa*, respectivamente, demostraron normalidad en los residuales.

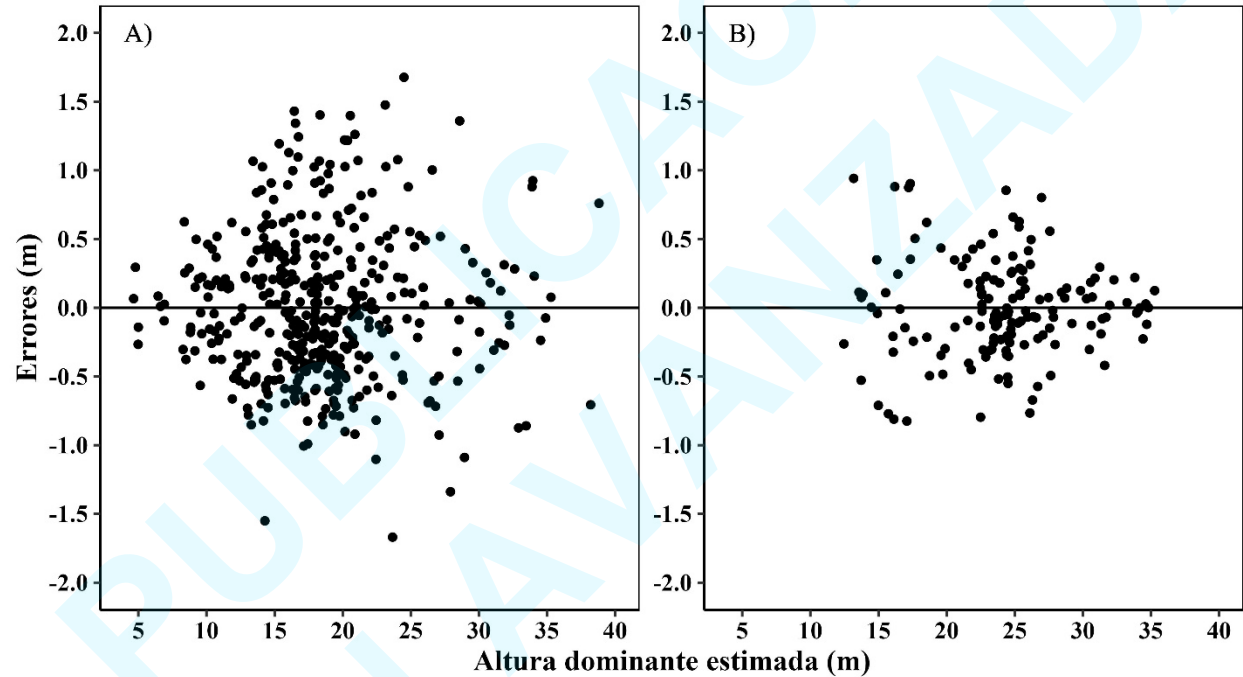


Figura 2. Dispersión de los residuales respecto a los valores predichos en los modelos de altura dominante: A) modelo Hossfeld IV (M5) de *Pinus patula* y B) modelo de Chapman-Richards (M3) de *Abies religiosa*.

La RCME y el sesgo se analizaron por medio de clases de edades (Figura 3). La RCME de M5 para *P. patula* mostró una tendencia creciente a medida que la edad aumenta, lo que se debe a la menor cantidad de observaciones en edades intermedias a maduras

(Figura 3, panel A). Para *A. religiosa*, M3 mostró un patrón inverso al anterior con una menor cantidad de observaciones en edades juveniles (Figura 3, panel B).

Las clases de edad de *A. religiosa* (Figura 3, panel C) tuvieron mejor estabilidad en el error con respecto a *P. patula* (Figura 3, panel D). El M5 de *P. patula* tiende a sobrestimar ligeramente la penúltima clase de edad (37-39 años) y a subestimar la última clase de edad (39 – 41 años). Los dos modelos mostraron estimaciones confiables para la predicción del crecimiento de AD.

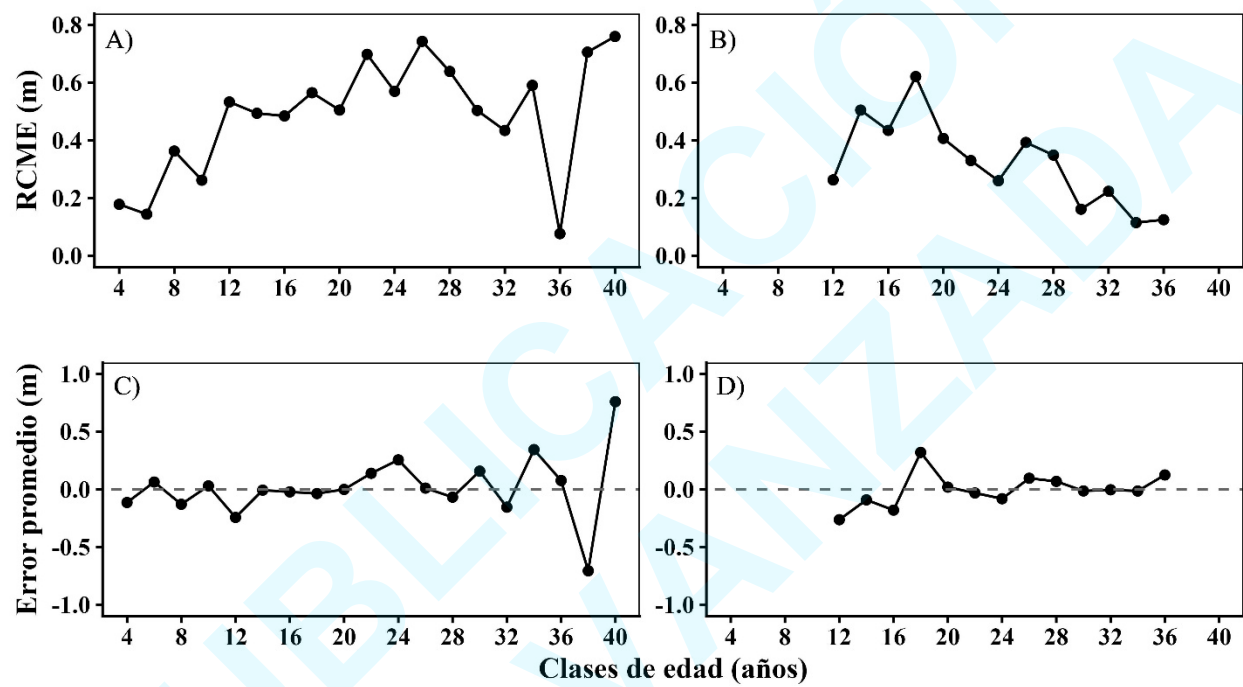


Figura 3. Raíz del cuadrado medio del error (RCME) y error promedio por clases de edad de dos años. Los paneles A y C corresponden al modelo Hossfeld IV (M5) de *Pinus patula*. Los paneles B y D corresponden al modelo de Chapman-Richards (M3) de *Abies religiosa*.

La capacidad predictiva de los modelos seleccionados se evaluó de forma gráfica y se confirmó el buen comportamiento de las estimaciones del crecimiento en AD (Figura 4). Estas proporcionaron todas las propiedades biológicas posibles de un modelo; por ejemplo, polimorfismo, asíntota en edades maduras, punto de origen en el tiempo cero y crecimiento sigmoideo.

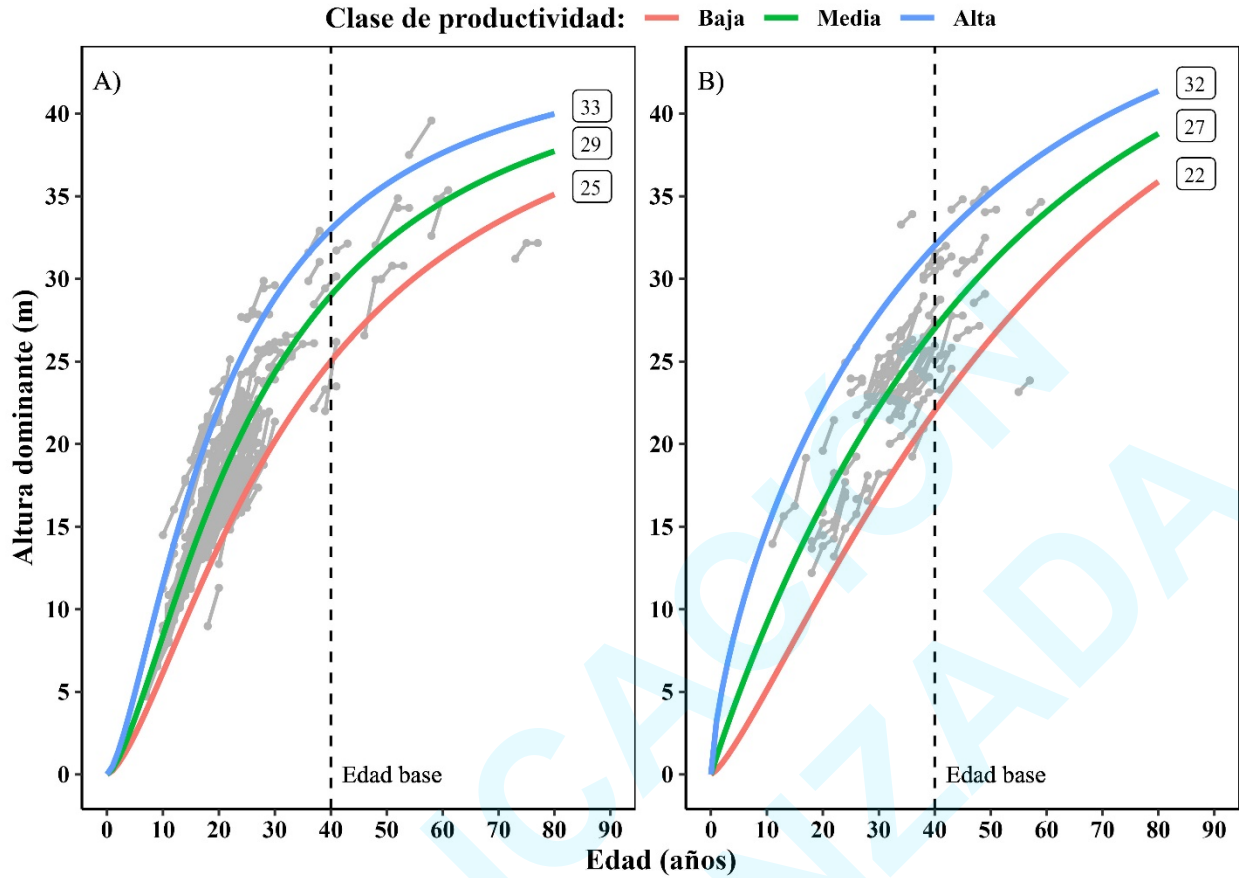


Figura 4. Curvas de índice de sitio sobrepuestas con altura dominante observada (líneas color gris): A) modelo Hossfeld IV para *Pinus patula* y B) modelo Chapman-Richards para *Abies religiosa*.

Los tres IS propuestos cubrieron de manera satisfactoria los patrones de crecimiento observados (Figura 4). En *P. patula* se utilizaron los IS 25, 29 y 33 m; en *A. religiosa* se utilizaron 22, 27 y 32 m. Con estos tres IS (bajo, medio y alto) se puede clasificar el potencial productivo de los rodales del área, de tal modo que sean útiles para definir la intensidad de tratamientos silvícolas establecidos en el plan de manejo. Los modelos finales por especie de AD e IS son los siguientes.

Pinus patula:

$$AD_2 = \frac{E_2^{1.482}}{\frac{E_1^{1.482}}{AD_1} - 0.022 \times E_1^{1.482} + 0.022 \times E_2^{1.482}}$$

$$IS = \frac{E_b^{1.482}}{\frac{E^{1.482}}{AD} - 0.022 \times E^{1.482} + 0.022 \times E_b^{1.482}}$$

Abies religiosa:

$$AD_2 = 48.427 \times (1 - e^{-0.02 \times E_2})^{\frac{\ln\left(\frac{AD_1}{48.427}\right)}{\ln(1 - e^{-0.02 \times E_1})}}$$

$$IS = 48.427 \times (1 - e^{-0.02 \times E_b})^{\frac{\ln\left(\frac{AD}{48.427}\right)}{\ln(1 - e^{-0.02 \times E})}}$$

Discusión

Los modelos de crecimiento de AD desarrollados en este y otros trabajos publicados en México son diferentes para *P. patula* (Nava-Nava et al., 2022) y *A. religiosa* (Guzmán-Santiago et al., 2021). Para *P. patula* se cuenta con una ecuación regional de tipo Korf, desarrollada por el SiBiFor, para la UMAFOR 2108 (Vargas-Larreta et al., 2017). También existe una ecuación de tipo Chapman-Richards para *A. religiosa* de la UMAFOR 2105 Pico de Orizaba cercana a la región de estudio (Guzmán-Santiago et al., 2021). Cabe señalar que ambos modelos se desarrollaron bajo el enfoque de EDAG, lo que contrasta con los resultados del presente estudio, donde los modelos basados en EDA mostraron mejor desempeño.

La **Figura 5** muestra la comparación de las curvas de crecimiento de AD e IS para *P. patula* propuestas en el SiBiFor y para *A. religiosa* por Guzmán-Santiago et al. (2021). Se observa que los resultados del SiBiFor subestiman el crecimiento de AD en las tres clases de IS con respecto a los resultados de este estudio (**Figura 5**, panel A), mientras que las curvas de IS de Guzmán-Santiago et al. (2021) tienden a subestimar el crecimiento de AD en edades menores de 40 años y posteriormente lo sobrestiman (**Figura 5**, panel B).

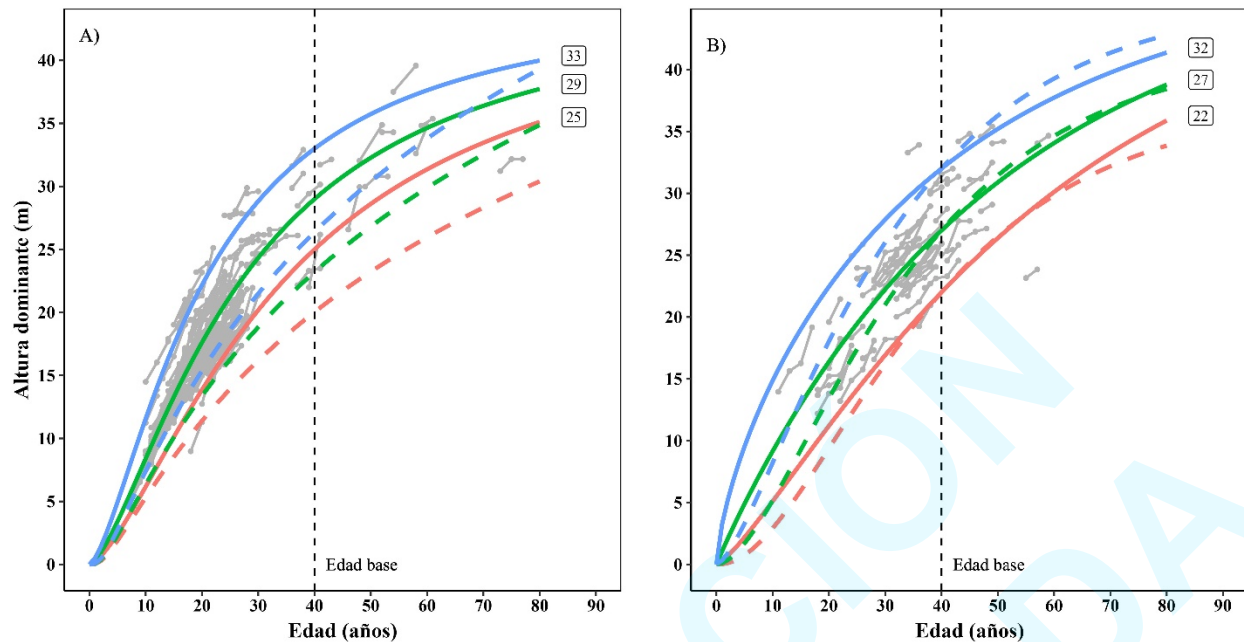


Figura 5. Crecimiento observado (color gris) y curvas de IS de esta investigación (líneas sólidas). Las líneas punteadas representan curvas de crecimiento propuestas por SiBiFor para *Pinus patula* (A) y por Guzmán-Santiago et al. (2021) para *Abies religiosa* (B).

Las estimaciones generadas por los modelos del SiBiFor y Guzmán-Santiago et al. (2021) no cubren satisfactoriamente el crecimiento de AD observado en el área de estudio. Lo anterior se atribuye al tamaño pequeño de muestra de ambas investigaciones: 20 árboles de *P. patula* utilizados por el SiBiFor y ocho árboles de *A. religiosa* utilizados por Guzmán-Santiago et al. (2021). Esto sugiere que no se incluyó toda la variabilidad de las condiciones ecológicas, edáficas y climáticas de la región. Lo anterior resalta la importancia de la generación de modelos locales para la predicción y proyección del crecimiento de AD, siempre que la muestra utilizada en los análisis cubra la mayor parte de las condiciones del sitio (Socha et al., 2021). Las ecuaciones antes expuestas y las del presente trabajo pueden ser una alternativa para clasificar el potencial productivo en sitios que no cuenten con este tipo de herramientas, pero que comparten las condiciones de estos tres estudios.

El método de variables *dummy* generó resultados satisfactorios. Este mismo método se utilizó en otros estudios con *Cedrus libani* A. Rich (Özçelik et al., 2019), *Pinus densiflora*

(Pyo, 2017) y *Pinus tadea* L. (Wang et al., 2020). En México, en otros trabajos de *P. patula* se utilizaron métodos como el iterativo (Nava-Nava et al., 2022) o regresión aparentemente no relacionada (Santiago-García et al., 2015); en el caso de *A. religiosa* también se utilizó el método iterativo para la construcción de 12 modelos de IS en varias regiones del país (Guzmán-Santiago et al., 2021).

La reparametrización de los modelos con variables *dummy* tiene ventajas importantes, ya que su estructura se asemeja a la de un modelo mixto y converge con mayor facilidad (Wang et al., 2020). Los métodos de variables *dummy* y modelo mixto forman parte del mismo esquema de modelación específica del sitio (Cieszewski & Strub, 2018). Algunos estudios mostraron que ambos enfoques presentan estimaciones similares en AD e IS (Orrego et al., 2021; Sprengel et al., 2022; Wang et al., 2008). Por otro lado, se ha resaltado el potencial que tiene el método de variable *dummy*, ya que genera estimaciones superiores a las de un modelo mixto (Cieszewski & Strub, 2018; Nigh, 2015), así como una mejor consistencia con la propiedad de invarianza de la edad base (Cieszewski & Strub, 2018).

La incorporación de una estructura de autocorrelación mejora la interpretación de las propiedades estadísticas del modelo (Kahriman et al., 2018). Generalmente, los datos longitudinales tienen un problema especial con la autocorrelación dentro de la unidad de observación (*i.e.* parcelas) (Özçelik et al., 2019). En esta investigación no se integró una estructura de autocorrelación, debido a que no mejoró el valor DW cuando se incluyó un AR1. El mismo resultado obtuvo Nord-Larsen (2006), quien concluyó que existe poca mejoría al integrar una estructura de autocorrelación, además de que este componente no tiene aplicación práctica (Wang et al., 2020). Ni y Zhang (2007) mencionaron que el método de variable *dummy* puede minimizar el efecto de autocorrelación, ya que la estructura de datos que se utiliza en el ajuste toma en cuenta parte de la autocorrelación y puede producir estadísticos válidos como los errores estándar de los parámetros.

Las PPM utilizadas en esta investigación incluyeron datos donde dominan *P. patula* y *A. religiosa* en área basal, pero coexisten otras especies de coníferas y latifoliadas; esto permitió el desarrollo de modelos para estimar el potencial productivo en rodales mixtos del área de estudio. Un estudio similar fue desarrollado por Quiñonez-Barraza et al.

(2015), quienes analizaron cinco especies dominantes en bosques de coníferas con mezcla de especies en Durango, México e indicaron que el IS está en función de la especie más abundante en el rodal como se sugiere en este trabajo. Seki y Sakici (2017) resaltan la importancia de contar con modelos de IS aplicados a rodales mezclados para evaluar la productividad de cada especie dominante. Esto da lugar a retomar los métodos desarrollados en rodales coetáneos y monoespecíficos para la construcción de modelos de crecimiento de AD e IS aplicado a rodales con mezcla de especies (Dais et al., 2023).

Conclusiones

Los modelos polimórficos de Hossfeld IV y Chapman-Richards con diferencia algebraica, se seleccionaron para estimar el crecimiento de altura dominante e índice de sitio para *Pinus patula* y *Abies religiosa*, respectivamente. Las variables *dummy* permitieron estimar parámetros específicos y globales. Los parámetros estimados fueron estadísticamente consistentes y las curvas de crecimiento de altura dominante cubrieron la dispersión de las observaciones de forma satisfactoria. Las ecuaciones de crecimiento de altura dominante permitirán a los silvicultores clasificar el potencial productivo de rodales con mezcla de especies del área de estudio, específicamente en sitios donde *P. patula* o *A. religiosa* dominen en área basal. Esta herramienta biométrica será útil en la toma de decisiones en el manejo forestal, para determinar la intensidad y el tiempo de aplicación de los aclareos de acuerdo con el turno definido en el área de estudio.

Agradecimientos

Al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencia y Tecnología (CONAHCYT), hoy Secretaría de Ciencia, Humanidades, Tecnología e Innovación (SECIHTI), por financiar al primer autor para cursar sus estudios de Doctorado en Ciencias (Apoyo 814397). A los

socios de la Reserva Forestal Multifuncional ‘El Manantial’, Aquixtla, Puebla, por facilitar las bases de datos y acceso a sus bosques. Al Colegio de Postgraduados por las facilidades otorgadas para realizar la investigación.

Declaración de conflicto de intereses

Los autores declaran que no tienen conflictos de intereses económicos ni relaciones personales conocidas que pudieran haber influido en el trabajo presentado en este artículo.

Declaración del uso de inteligencia artificial (IA)

Los autores declaran no haber utilizado IA generativa o tecnologías asistidas por IA para el desarrollo del presente manuscrito.

Referencias

- Bailey, R. L., & Clutter, J. L. (1974). Base-age invariant polymorphic site curves. *Forest Science*, 20(2), 155-159. <https://doi.org/10.1093/forestscience/20.2.155>
- Barrón, A. J. S. (2021). Biodiversidad y manejo forestal en la Sierra Norte de Puebla. *Elemento*, 28(3), 45-49. <https://elementos.buap.mx/post.php?id=671>
- Castañeros-Martínez, L. J., & Castro-Zavala, S. (2014). *Manejo forestal: Reserva Forestal Multifuncional “El Manantial” SC. Conceptos, conductas y acciones*. <https://files.acquia.undp.org/public/migration/latinamerica/UNDP-RBLAC-ManejoForestalMX.pdf>
- Cieszewski, C. J., & Bailey, R. L. (2000). Generalized algebraic difference approach: Theory based derivation of dynamic site equations with polymorphism and variable asymptotes. *Forest Science*, 46(1), 116-126. <https://doi.org/10.1093/forestscience/46.1.116>

- 274 Cieszewski, C. J., Harrison, M., & Martin, S. W. (2000). *Practical methods for estimating*
 275 *non-biased parameters in self-referencing growth and yield models.*
 276 [https://citeseerx.ist.psu.edu/document?repid=rep1&type=pdf&doi=11e8bde4a310](https://citeseerx.ist.psu.edu/document?repid=rep1&type=pdf&doi=11e8bde4a3109639725605a2f090e2e03772e82d)
 277 [9639725605a2f090e2e03772e82d](https://citeseerx.ist.psu.edu/document?repid=rep1&type=pdf&doi=11e8bde4a3109639725605a2f090e2e03772e82d)
- 278 Cieszewski, C. J., & Strub, M. (2018). Comparing properties of self-referencing models
 279 based on nonlinear-fixed-effects versus nonlinear-mixed-effects modeling
 280 approaches. *Mathematical and Computational Forestry & Natural Resource*
 281 *Sciences*, 10(2), 46-57.
 282 <https://www.mcfns.com/index.php/Journal/article/view/10.11/2018.11>
- 283 Dais, G., Kitikidou, K., & Milios, E. (2023). Site index curves for *Abies borisii-regis* Mattf.
 284 and *Fagus sylvatica* L. mixed stands in central Greece. *Sustainability*, 15(13), 1-
 285 13. <https://doi.org/10.3390/su151310349>
- 286 Guzmán-Santiago, J. C., Aguirre-Calderón, O. A., Vargas-Larreta, B., Gómez-Cárdenas,
 287 M., de los Santos-Posadas, H. M., Quiñonez-Barraza, G., & Marroquín-Morales, P.
 288 (2021). Ecuaciones de calidad de sitio para *Abies religiosa* en diferentes regiones
 289 de México. *Madera y Bosques*, 27(3), 1-14.
 290 <https://doi.org/10.21829/myb.2021.2732232>
- 291 Hipler, S.-M., Spiecker, H., & Wu, S. (2021). Dynamic top height growth models for eight
 292 native tree species in a cool-temperate region in northeast China. *Forests*, 12(8),
 293 1-15. <https://doi.org/10.3390/f12080965>
- 294 Kahrman, A., Sönmez, T., & von Gadow, K. (2018). Site index models for calibrian pine
 295 in the central mediterranean region of Turkey. *Journal of Sustainable Forestry*,
 296 37(5), 459-474. <https://doi.org/10.1080/10549811.2017.1421086>
- 297 Koirala, A., Montes, C. R., & Bullock, B. P. (2021). Modeling dominant height using stand
 298 and water balance variables for loblolly pine in the Western Gulf, US. *Forest*
 299 *Ecology and Management*, 479, 118610.
 300 <https://doi.org/10.1016/j.foreco.2020.118610>
- 301 Nava-Nava, A., Santiago-García, W., Quiñonez-Barraza, G., de los Santos-Posadas, H.
 302 M., Valdez-Lazalde, J. R., & Ángeles-Pérez, G. (2022). Climatic and topographic

variables improve estimation accuracy of patula pine forest site productivity in southern Mexico. *Forests*, 13(8), 1-15. <https://doi.org/10.3390/f13081277>

Ni, C., & Zhang, L. (2007). An analysis and comparison of estimation methods for self-referencing equations. *Canadian Journal of Forest Research*, 37(8), 1472-1484. <https://doi.org/10.1139/X06-285>

Nigh, G. (2015). Engelmann spruce site index models: A comparison of model functions and parameterizations. *PLoS ONE*, 10(4), e0124079. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0124079>

Nord-Larsen, T. (2006). Developing dynamic site index curves for European Beech (*Fagus sylvatica* L.) in Denmark. *Forest Science*, 52(2), 173-181. <https://doi.org/10.1093/forestscience/52.2.173>

Orrego, S., Montes, C., Restrepo, H. I., Bullock, B. P., & Zapata, M. (2021). Modeling height growth for teak plantations in Colombia using the reducible stochastic differential equation approach. *Journal of Forestry Research*, 32(3), 1035-1045. <https://doi.org/10.1007/s11676-020-01174-y>

Özçelik, R., Cao, Q. V., Gómez-García, E., Crecente-Campo, F., & Eler, Ü. (2019). Modeling dominant height growth of cedar (*Cedrus libani* A. Rich) stands in Turkey. *Forest Science*, 65(6), 725-733. <https://doi.org/10.1093/forsci/fxz038>

Pinheiro, J., Bates, D., & R Core Team. (2023). *nlme: Linear and nonlinear mixed effects models*. R Foundation for Statistical Computing. <https://CRAN.R-project.org/package=nlme>

Poudel, K. P., & Cao, Q. V. (2013). Evaluation of methods to predict weibull parameters for characterizing diameter distributions. *Forest Science*, 59(2), 243-252. <https://doi.org/10.5849/forsci.12-001>

Pyo, J. (2017). Developing the site index equation using a generalized algebraic difference approach for *Pinus densiflora* in central region, Korea. *Forest Science and Technology*, 13(2), 87-91. <https://doi.org/10.1080/21580103.2017.1308889>

330 Quiñonez-Barraza, G., de los Santos-Posadas, H., Manuel, Cruz-Cobos, F., Velázquez-
 331 Martínez, A., Ángeles-Pérez, G., & Ramírez-Valverde, G. (2015). Índice de sitio
 332 con polimorfismo complejo para masas forestales de Durango, México.
 333 *Agrociencia*, 49(4), 439-454. [https://agrociencia-](https://agrociencia-colpos.org/index.php/agrociencia/article/view/1157/1157)
 334 [colpos.org/index.php/agrociencia/article/view/1157/1157](https://agrociencia-colpos.org/index.php/agrociencia/article/view/1157/1157)

335 R Development Core Team. (2024). *R: A language and environment for statistical*
 336 *computing*. R Foundation for Statistical Computing. <https://www.R-project.org/>

337 Salas-Eljatib, C. (2020). Height growth–rate at a given height: A mathematical perspective
 338 for forest productivity. *Ecological Modelling*, 431, 109198.
 339 <https://doi.org/10.1016/j.ecolmodel.2020.109198>

340 Santiago-García, W., de los Santos-Posadas, H. M., Ángeles-Pérez, G., Valdez-Lazalde,
 341 J. R., Corral-Rivas, J. J., Rodríguez-Ortiz, G., & Santiago-García, E. (2015).
 342 Modelos de crecimiento y rendimiento de totalidad del rodal para *Pinus patula*.
 343 *Madera y Bosques*, 21(3), 95-110. <https://doi.org/10.21829/myb.2015.213459>

344 Seki, M., & Sakici, O. E. (2017). Dominant height growth and dynamic site index models
 345 for Crimean pine in the Kastamonu–Taşköprü region of Turkey. *Canadian Journal*
 346 *of Forest Research*, 47(11), 1441-1449. <https://doi.org/10.1139/cjfr-2017-0131>

347 Socha, J., Tymińska-Czabańska, L., Bronisz, K., Zięba, S., & Hawryło, P. (2021). Regional
 348 height growth models for Scots pine in Poland. *Scientific Reports*, 11(1), 10330.
 349 <https://doi.org/10.1038/s41598-021-89826-9>

350 Sprengel, L., Spiecker, H., & Wu, S. (2022). Two subject specific modelling approaches
 351 to construct base-age invariant polymorphic site index curves with varying
 352 asymptotes. *Silva Fennica*, 56(1), 1-18. <https://doi.org/10.14214/sf.10544>

353 Tarmu, T., Laarmann, D., & Kiviste, A. (2020). Mean height or dominant height – what to
 354 prefer for modelling the site index of Estonian forests? *Forestry Studies*, 72(1), 121-
 355 138. <https://doi.org/10.2478/fsmu-2020-0010>

356 Trim, K. R., Coble, D. W., Weng, Y., Stovall, J. P., & Hung, I. K. (2020). A new site index
 357 model for intensively managed loblolly pine (*Pinus taeda*) plantations in the West

- 358 Gulf Coastal Plain. *Forest Science*, 66(1), 2-13.
359 <https://doi.org/10.1093/forsci/fxz050>
- 360 Valdez-Lazalde, J. R., & Lynch, T. B. (2000). Ecuaciones para estimar volumen comercial
361 y total en rodales aclareados de *Pinus patula* en Puebla, México. *Agrociencia*,
362 34(6), 747-758. [https://agrociencia-](https://agrociencia-colpos.org/index.php/agrociencia/article/view/79/79)
363 [colpos.org/index.php/agrociencia/article/view/79/79](https://agrociencia-colpos.org/index.php/agrociencia/article/view/79/79)
- 364 Vargas-Larreta, B., Corral-Rivas, J. J., Aguirre-Calderón, O. A., López-Martínez, J. O.,
365 Santos-Posadas, H. M., Zamudio-Sánchez, F. J., Treviño-Garza, E. J., Martínez-
366 Salvador, M., & Aguirre-Calderón, C. G. (2017). SiBiFor: Sistema Biométrico
367 Forestal para el manejo de los bosques de México. *Revista Chapingo Serie*
368 *Ciencias Forestales y del Ambiente*, 23(3), 437-455.
369 <https://doi.org/10.5154/r.rchscfa.2017.06.040>
- 370 Wang, M., Borders, B. E., & Zhao, D. (2008). An empirical comparison of two subject-
371 specific approaches to dominant heights modeling: The dummy variable method
372 and the mixed model method. *Forest Ecology and Management*, 255(7), 2659-
373 2669. <https://doi.org/10.1016/j.foreco.2008.01.030>
- 374 Wang, M., Montes, C. R., Bullock, B. P., & Zhao, D. (2020). An empirical examination of
375 dominant height projection accuracy using difference equation models. *Forest*
376 *Science*, 66(3), 267-274. <https://doi.org/10.1093/forsci/fxz079>
- 377 Zeoli, L., De Mil, T., Forler, A., Pau, M., Latte, N., Claessens, H., & Ligot, G. (2025).
378 Modeling productivity of silver birch (*Betula pendula* Roth.) combining phytocentric
379 and geocentric approaches in Northwestern Europe. *Forest Ecology and*
380 *Management*, 578, 122473. <https://doi.org/10.1016/j.foreco.2024.122473>