



Dominant height growth of *Pinus patula* Schiede ex Schltdl. & Cham. and *Abies religiosa* (Kunth) Schltdl. & Cham. in Puebla, Mexico

Crecimiento en altura dominante de *Pinus patula* Schiede ex Schltdl. & Cham. y *Abies religiosa* (Kunth) Schltdl. & Cham. de Puebla, México

✉ Abel J. Hernández-Martínez^{1*}; ✉ Valentín J. Reyes-Hernández¹;
✉ Alejandro Velázquez-Martínez¹; ✉ Héctor M. De los Santos-Posadas¹;
✉ Armando Gómez-Guerrero¹; ✉ Vidal Guerra-de la Cruz²

¹Colegio de Postgraduados, Posgrado en Ciencias Forestales. Carretera México-Texcoco km 36.5. C. P. 56230. Montecillo, Texcoco, Estado de México, México.

²Instituto Nacional de Investigaciones Forestales, Agrícolas y Pecuarias (INIFAP), Sitio Experimental Tlaxcala. Carretera Tlaxcala-Santa Ana Chiautempan km 2.5, Colonia Industrial. C. P. 90800. Tlaxcala, México.

*Corresponding author: ajhmtz@gmail.com

Abstract

Introduction. Estimating site productivity is essential for effective forest management. Site index (SI) and dominant height growth (DH) are important tools for classifying the productivity of forest stands.

Objective. To fit DH and SI models for *Pinus patula* Schiede ex Schltdl. & Cham. and *Abies religiosa* (Kunth) Schltdl. & Cham. in naturally regenerated, managed forests in the state of Puebla, Mexico.

Methods. A total of 179 permanent sampling plots were used, encompassing a range of stand ages, densities, and forest management conditions. A total of 422 and 153 DH-age data pairs were obtained for *P. patula* and *A. religiosa*, respectively. The algebraic difference approach (ADA) and generalized algebraic difference approach (GADA) were used to reparameterize the Bailey-Clutter, Chapman-Richards, Hossfeld IV, and Levakovic II models. The dummy variable method and generalized least squares were used for model fitting, and the models were compared using a ranking system based on five statistical indicators.

Results. The parameter estimates using the ADA were significant ($P < 0.05$), whereas some of the GADA parameters estimates were not significant ($P > 0.05$). The ranking system showed that the polymorphic models based on Hossfeld IV and Chapman-Richards fitted using the ADA, had the best statistical performance for *P. patula* and *A. religiosa*, respectively. The SI trajectories generated by both models satisfactorily encompassed the observations from the permanent sampling plots.

Conclusions. The models developed allow for the estimation of DH growth and the classification of stand productivity in mixed-species stands, thereby contributing to improve forest management planning.

Keywords: Site index, algebraic difference, growth models, mixed-species stands, dummy variable.

Resumen

Introducción. La estimación del potencial productivo del sitio es clave en el manejo forestal. El índice de sitio (IS) y el crecimiento de altura dominante (AD) son herramientas que permiten clasificar la productividad de rodales.

Objetivo. Ajustar modelos de AD e IS para *Pinus patula* Schiede ex Schltdl. & Cham. y *Abies religiosa* (Kunth) Schltdl. & Cham. en bosques naturales con manejo forestal en el estado de Puebla, México.

Métodos. Se utilizaron 179 parcelas permanentes de muestreo que cubrieron condiciones distintas de edad, densidad y manejo forestal. Se obtuvieron 422 y 153 pares de datos AD-Edad de árboles de *P. patula* y *A. religiosa*, respectivamente. El enfoque de diferencia algebraica (EDA) y diferencia algebraica generalizada (EDAG) se utilizaron para reparametrizar los modelos de Bailey-Clutter, Chapman-Richards, Hossfeld-IV y Levakovic-II. El método de variable *dummy* y la técnica de mínimos cuadrados generalizados se usaron en el ajuste y los modelos se compararon mediante un sistema de calificación con cinco indicadores estadísticos.

Resultados. Los parámetros estimados con el EDA fueron significativos ($P < 0.05$) y algunos parámetros del EDAG no lo fueron ($P > 0.05$). El sistema de calificación mostró que los modelos polimórficos (EDA) de Hossfeld IV y Chapman-Richards tuvieron los mejores indicadores estadísticos para *P. patula* y *A. religiosa*, respectivamente. Las trayectorias de IS de los dos modelos cubrieron satisfactoriamente las observaciones de las parcelas permanentes de muestreo.

Conclusiones. Los modelos desarrollados permiten estimar el crecimiento de AD y clasificar el potencial productivo de los rodales con mezcla de especies, lo cual contribuye a mejorar la planificación del manejo forestal.

Palabras clave: índice de sitio, diferencia algebraica, modelos de crecimiento, rodales mezclados, variable *dummy*.

Please cite this article as follows (APA 7): Hernández-Martínez, A. J., Reyes-Hernández, V. J., Velázquez-Martínez, A., De los Santos-Posadas, H. M., Gómez-Guerrero, A., & Guerra-de la Cruz, V. (2026). Dominant height growth of *Pinus patula* Schiede ex Schltdl. & Cham. and *Abies religiosa* (Kunth) Schltdl. & Cham. in Puebla, Mexico. *Revista Chapingo Serie Ciencias Forestales y del Ambiente*, 32, e26005. <https://doi.org/10.5154/r.rchscfa.2026.01.005>



Introduction

The use of silvicultural treatments in forest management requires stand productivity estimates (Cieszewski & Strub, 2018) and an understanding of stand growth and yield dynamics (Seki & Sakici, 2017). This information enables forest managers to schedule treatments according to the productive potential of the forest (Özçelik et al., 2019). In this context, data from permanent sampling plots are essential (Tarmu et al., 2020) to provide information on the different stages of stand development (Seki & Sakici, 2017).

Stand productivity can be inferred from site quality by qualitatively relating a set of stand attributes (Koirala et al., 2021; Zeoli et al., 2025) or by using site index (SI), which evaluates stand quality based on dominant height (DH) growth (Özçelik et al., 2019). SI is more practical for estimating the productive potential of a stand (Salas-Eljatib, 2020), because of the direct relationship between site quality and the height growth of dominant trees (Seki & Sakici, 2017).

Three approaches are available for developing DH and SI growth models (Kahriman et al., 2018): the guide curve approach, the algebraic difference approach, and parameter prediction. The algebraic difference approach is the most widely used and includes the algebraic difference method (ADA) (Bailey & Clutter, 1974) and the generalized algebraic difference approach (GADA) (Cieszewski & Bailey, 2000). ADA and GADA generate dynamic SI equations and provide realistic growth patterns, with invariance (transitivity) over different base ages and the ability to produce the same estimates regardless of the base age selected (Cieszewski & Strub, 2018).

The Chignahuapan-Zacatlán Forest Management Unit (UMAFOR 2108) is located in the Sierra Norte de Puebla, Mexico, and has high potential for forest production (Barrón, 2021). In this region, *Pinus patula* Schiede ex Schltdl. & Cham. is the most commercially important species compared with *Abies religiosa* (Kunth) Schltdl. & Cham. (Valdez-Lazalde & Lynch, 2000). Biometric tools have been developed for several forest species within UMAFOR 2108 and are included in the Mexican Forest Biometric System (SiBiFor, <http://fcfposgrado.ujed.mx/sibifor/inicio/>). Although SiBiFor provides regional equations for modeling DH and SI growth of *P. patula* in UMAFOR 2108 (Vargas-Larreta et al., 2017), models developed at a broad spatial scale may not fully account for the variability in climatic, soil, ecological, and forest management conditions that influence species growth (Socha et al., 2021).

The objective of the present study was to develop local dynamic models of DH and SI growth to classify the potential productivity of stands of *P. patula* and *A.*

Introducción

La aplicación de tratamientos silvícolas en el manejo forestal requiere estimaciones de la productividad del rodal (Cieszewski & Strub, 2018) y conocimiento de su dinámica de crecimiento y rendimiento (Seki & Sakici, 2017), lo cual permite que el silvicultor programe tratamientos de acuerdo con el potencial productivo del bosque (Özçelik et al., 2019). En este sentido, es indispensable contar con datos de parcelas de muestreo permanente (Tarmu et al., 2020), de tal forma que se tengan escenarios de las etapas de desarrollo del rodal (Seki & Sakici, 2017).

La productividad de rodales puede inferirse con la calidad de estación al relacionar un conjunto de atributos del rodal de forma cualitativa (Koirala et al., 2021; Zeoli et al., 2025) o con el índice de sitio (IS) que evalúa la calidad del rodal a través del crecimiento en altura dominante (AD) (Özçelik et al., 2019). El IS es más práctico para estimar el potencial productivo de un rodal (Salas-Eljatib, 2020), por la correlación directa entre la calidad del sitio y el crecimiento en altura de árboles dominantes (Seki & Sakici, 2017).

Existen tres enfoques para el desarrollo de modelos de crecimiento en AD e IS (Kahriman et al., 2018): curva guía, ecuaciones de diferencia algebraica y predicción de parámetros; el segundo es el de mayor uso bajo el enfoque de diferencia algebraica (EDA) (Bailey & Clutter, 1974) y diferencia algebraica generalizada (EDAG) (Cieszewski & Bailey, 2000). EDA y EDAG generan ecuaciones dinámicas de IS y proporcionan patrones de crecimiento realistas, con propiedades de invarianza (transitividad) en la edad base y con la capacidad de obtener las mismas estimaciones a cualquier edad base (Cieszewski & Strub, 2018).

La Unidad de Manejo Forestal Chignahuapan-Zacatlán (UMAFOR 2108) se localiza en la Sierra Norte de Puebla, México y tiene potencial alto de producción forestal (Barrón, 2021). En esta región, *Pinus patula* Schiede ex Schltdl. & Cham. es la especie más comercial con respecto a *Abies religiosa* (Kunth) Schltdl. & Cham. (Valdez-Lazalde & Lynch, 2000). En la UMAFOR 2108 se generaron herramientas biométricas para algunas especies forestales y forman parte del Sistema Biométrico Forestal de México (SiBiFor, <http://fcfposgrado.ujed.mx/sibifor/inicio/>). No obstante, aunque el SiBiFor tiene ecuaciones regionales para modelar el crecimiento en AD e IS de *P. patula* para la UMAFOR 2108 (Vargas-Larreta et al., 2017), en ocasiones, un modelo construido a gran escala no cubre la variabilidad de condiciones climáticas, edáficas, ecológicas y de manejo forestal que influyen en el crecimiento de las especies (Socha et al., 2021).

El objetivo del presente estudio fue generar modelos

religiosa in Aquixtla, Puebla. The following hypotheses were proposed: i) a DH growth model developed under mixed, species conditions, with *P. patula* or *A. religiosa* dominant in terms of basal area, can project DH for the entire stand; and ii) the SI model developed for both species can classify site productivity potential in mixed-species stands.

Materials and Methods

Study area

The study was carried out in the Reserva Forestal Multifuncional 'El Manantial' S. C., located in the municipalities of Aquixtla and Ixtacamaxtitlán, Puebla, Mexico (Figure 1), within UMAFOR 2108. The reserve encompasses 278 ha of forestland and is located between 19° 42' 27.4" – 19° 44' 37.6" N and 98° 00' 43.9" – 98° 58' 56.5 W, at elevations ranging from 2650 to 3178 m above sea level. The climate is humid temperate, with a mean annual temperature of 18 °C and mean annual precipitation of 1000 mm. The predominant soils are Andosols (Castaños-Martínez & Castro-Zavala, 2014).

P. patula and *A. religiosa* are the dominant species in terms of basal area at the study site, occurring in mixed-species stands with varying proportions of both species and in association with less abundant species,

dinámicos locales de crecimiento en AD e IS para clasificar la productividad potencial de los rodales de *P. patula* y *A. religiosa* en Aquixtla, Puebla. Se plantearon las hipótesis siguientes: i) un modelo de crecimiento en AD desarrollado en condiciones de mezcla de especies con dominancia en área basal de *P. patula* o *A. religiosa* proyecta la AD a nivel de totalidad de rodal y ii) el modelo de IS desarrollado para ambas especies permite clasificar el potencial productivo del sitio en rodales mezclados.

Materiales y métodos

Área de estudio

La investigación se realizó en la Reserva Forestal Multifuncional 'El Manantial' S. C., ubicada en Aquixtla e Ixtacamaxtitlán, Puebla, México (Figura 1), la cual pertenece a la UMAFOR 2108. La reserva tiene una superficie forestal de 278 ha y se localiza entre las coordenadas 19° 42' 27.4" – 19° 44' 37.6" N y 98° 00' 43.9" – 98° 58' 56.5 O en un intervalo altitudinal de 2650 a 3178 m. El clima es templado húmedo con temperatura media anual de 18 °C y precipitación media anual de 1000 mm. Los suelos predominantes son de tipo Andosol (Castaños-Martínez & Castro-Zavala, 2014).

En el sitio dominan *P. patula* y *A. religiosa* en área basal con mezclas de ambas especies en diferentes

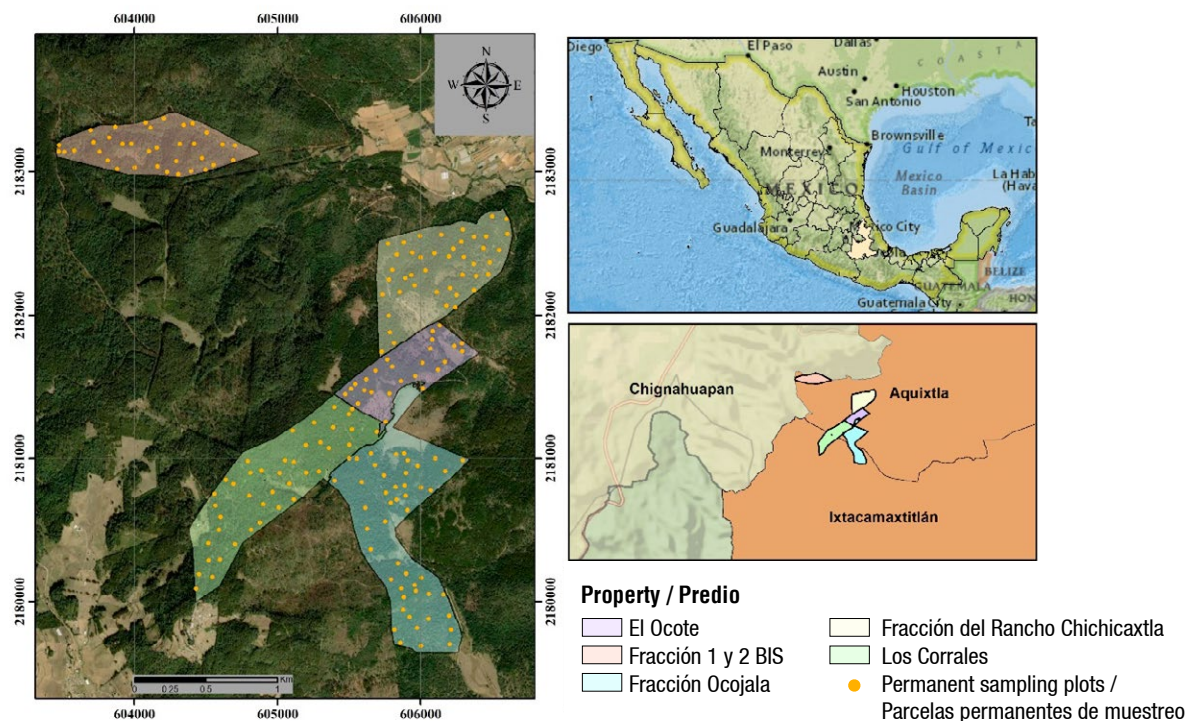


Figure 1. Geographic location of the Reserva Forestal Multifuncional 'El Manantial' and spatial distribution of the permanent sampling plots.

Figura 1. Ubicación geográfica de la Reserva Forestal Multifuncional 'El Manantial' y distribución espacial de las parcelas permanentes de muestreo.

including *Pinus teocote* Schltdl. & Cham., *Pinus rudis* Lindl., *Pinus ayacahuite* Ehrenb., *Pinus montezumae* Lamb., *Pinus pseudostrobus* Lindl., and several broadleaf species (Castaños-Martínez & Castro-Zavala, 2014).

The study area is managed under the Silvicultural Development Method (MDS) and the Successive Shelterwood Cutting System (SICOSUP). The former is applied at elevations below 3 000 m, whereas the latter is used at elevations above 3 000 m. Areas managed under MDS and SICOSUP follow a rotation-based forest management approach and use the seed-tree and successive-cutting regeneration methods, respectively (Castaños-Martínez & Castro-Zavala, 2014).

Data collection

The data were collected from two periods of permanent sampling plot (PSP) establishment, encompassing a range of ecological and forest management conditions, stand densities, and ages. The first period consisted of 103 PSP established in 2008 at sites where *P. patula* and *A. religiosa* were dominant in terms of basal area. These plots were remeasured three times at two-year intervals; in some cases, only one remeasurement was available (Table 1). The second period consisted of 190 PSP established between 2018 and 2023 and remeasured at two-year intervals; some plots contained mixtures of the two study species. PSP in which neither *P. patula* nor *A. religiosa* was dominant were excluded from the analysis. In addition, only plots with more than two measurements were considered, resulting in 76 PSP. Overall, 179 PSP were included in the study, of which *P. patula* was dominant in 128 and *A. religiosa* in 51 (Table 1).

The shape of the PSP was circular. During the first establishment period, the PSP covered 300 m² in stands younger than 15 years and 600 m² in stands older than 15 years; during the second establishment period, all PSP covered 600 m². In all PSP, tree diameter at breast height (DBH, cm) and total height (m) were measured.

proporciones y con otras menos abundantes como *Pinus teocote* Schltdl. & Cham., *Pinus rudis* Lindl., *Pinus ayacahuite* Ehrenb., *Pinus montezumae* Lamb., *Pinus pseudostrobus* Lindl. y algunas latifoliadas (Castaños-Martínez & Castro-Zavala, 2014).

El área se encuentra bajo manejo forestal con el Método de Desarrollo Silvícola (MDS) y el Sistema de Cortas Sucesivas de Protección (SICOSUP); el primero se aplica en altitudes menores de 3 000 m y el segundo por arriba de los 3 000 m. Las áreas con MDS y SICOSUP se administran con el enfoque de manejo forestal de rotación y con los métodos de regeneración de árboles semilleros y cortas sucesivas, respectivamente (Castaños-Martínez & Castro-Zavala, 2014).

Registro de datos

Los datos provienen de dos periodos de establecimiento de parcelas permanentes de muestreo (PPM), las cuales cubrieron diferentes condiciones ecológicas, de manejo forestal, densidad y edades. El primero consistió en 103 PPM establecidas en 2008 en sitios con dominancia de *P. patula* y *A. religiosa* en área basal, las cuales se remidieron tres veces cada dos años; en algunos casos solo existe una remediación (Cuadro 1). El segundo consistió en 190 PPM establecidas entre 2018 a 2023 y remedidas cada dos años; algunas mostraron una mezcla de las dos especies bajo estudio. Las PPM donde no dominaron *P. patula* o *A. religiosa* se excluyeron del análisis; además, solo se consideraron las que tuvieran más de dos mediciones, lo cual resultó en 76 PPM. Al final se obtuvo un total de 179 PPM; *P. patula* dominó en 128 y *A. religiosa* en 51 (Cuadro 1).

La forma de las PPM fue circular. En el primer periodo de establecimiento, las PPM midieron 300 m² en rodales menores de 15 años y 600 m² en rodales mayores de 15 años; en el segundo periodo, midieron 600 m². En todas las PPM se midieron el diámetro normal (cm) y la altura total (m) de los árboles.

Table 1. Number of permanent sampling plots (PSP) established by source, species, and number of measurements in the Reserva Forestal Multifuncional ‘El Manantial’, Puebla, Mexico.

Cuadro 1. Número de parcelas permanentes de muestreo (PPM) establecidas por fuente, especie y número de mediciones en la Reserva Forestal Multifuncional ‘El Manantial’, Puebla, México.

Species / Especie	Establishment period / Periodo de establecimiento	Number of measurements* / Número de mediciones*			Total PSP / Total de PPM
		4	3	2	
<i>Pinus patula</i>	2008-2014	77	-	2	79
	2018-2023	-	12	37	49
<i>Abies religiosa</i>	2008-2014	23	-	1	24
	2018-2023	-	5	22	27

In each PSP, three to five dominant or codominant trees were selected, and an increment core was extracted from each tree at breast height using a Pressler® increment borer to count the annual growth rings. The mean number of growth rings was used to estimate PSP age (E, years). Plot dominant height (DH) was calculated as the mean height of the sampled trees. A total of 422 and 157 DH-E data pairs were considered for *P. patula* and *A. religiosa*, respectively (Table 2).

Dominant height and site index models

A total of four base growth models were selected: Bailey-Clutter, Chapman-Richards, Hossfeld IV and Levakovic II (Özçelik et al., 2019; Seki & Sakici, 2017; Trim et al., 2020). These models were reparameterized using ADA (Bailey & Clutter, 1974) and GADA (Cieszewski & Bailey, 2000), following the procedure described by Hippler et al. (2021), to obtain dynamic DH models, as shown in Equation 1.

$$DH_2 = f(DH_1, A_1, A_2; \chi, \beta) + \varepsilon \quad \text{Eq. 1}$$

Where,

DH_2 = dominant height growth at age A_2

DH_1 = dominant height observed at age A_1

χ = site-related function

β = vector of global parameters

ε = random error.

The difference between ADA and GADA lies in the number of parameters related to χ . When one parameter was selected, the model was considered an ADA model (Bailey & Clutter, 1974) models with two parameters were classified as GADA models (Cieszewski & Bailey, 2000). Eight dynamic dominant DH growth models were derived (Table 3): four polymorphic models using ADA (M1, M3, M5 and M7) and four polymorphic models with variable asymptotes using GADA (M2, M4, M6 and M8).

Model fitting and statistical evaluation

The models were fitted using dummy variables to simultaneously estimate local and global fixed parameters (Cieszewski et al., 2000) and to obtain unique

En cada PPM se seleccionaron de tres a cinco árboles dominantes o codominantes y se les extrajo un núcleo de madera con un taladro de Pressler® a la altura del diámetro normal, para contar los anillos de crecimiento. El promedio del conteo de anillos fue la edad de la PPM (E, años). La AD de la parcela fue el promedio de las alturas de los árboles muestreados. Se consideraron 422 y 157 pares de datos AD-E para *P. patula* y *A. religiosa*, respectivamente (Cuadro 2).

Modelos de altura dominante e índice de sitio

Se seleccionaron cuatro modelos base de crecimiento: Bailey-Clutter, Chapman-Richards, Hossfeld IV y Levakovic II (Özçelik et al., 2019; Seki & Sakici, 2017; Trim et al., 2020), los cuales se reparametrizaron con el EDA (Bailey & Clutter, 1974) y el EDAG (Cieszewski & Bailey, 2000) con el procedimiento de Hippler et al. (2021) para obtener el modelo dinámico de AD como en la Ecuación 1.

$$AD_2 = f(AD_1, E_1, E_2; \chi, \beta) + \varepsilon \quad \text{Eq. 1}$$

Donde,

AD_2 = crecimiento de altura dominante en E_2

AD_1 = altura dominante observada en E_1

χ = función relacionada con el sitio

β = vector de parámetro globales

ε = error aleatorio.

La diferencia entre el EDA y el EDAG radica en el número de parámetros relacionados con χ ; cuando se seleccionó un parámetro se trató del EDA (Bailey & Clutter, 1974) y cuando se relacionaron dos parámetros se consideró un EDAG (Cieszewski & Bailey, 2000). Se derivaron ocho modelos dinámicos de crecimiento de AD (Cuadro 3): cuatro polimórficos bajo el EDA (M1, M3, M5 y M7) y cuatro polimórficos con asíntotas variables con el EDAG (M2, M4, M6 y M8).

Ajuste y evaluación estadística de modelos

Los modelos se ajustaron con variables *dummy* para estimar simultáneamente parámetros fijos locales y globales

Table 2. Descriptive statistics of dominant height (DH) and age for the two study species in the Reserva Forestal Multifuncional 'El Manantial', Puebla, Mexico.

Cuadro 2. Estadísticos descriptivos de altura dominante (AD) y edad para las dos especies de estudio en la Reserva Forestal Multifuncional 'El Manantial', Puebla, México.

Species/ Especie	Variable	n	Minimum/ Mínimo	Mean/ Media	Maximum/ Máximo	Standard deviation/ Desviación estándar
<i>Pinus patula</i>	DH (m) / AD (m)	422	4.7	18.4	39.6	5.9
	Age (years) / Edad (años)	422	7.0	22.4	77.0	9.8
<i>Abies religiosa</i>	DH (m) / AD (m)	157	12.2	24.4	38.1	5.5
	Age (years) / Edad (años)	157	11.0	34.6	59.0	9.1

Table 3. Base dominant-height growth models and their parameterization using the algebraic difference approach (ADA: M1, M3, M5 and M7) and the generalized algebraic difference approach (GADA: M2, M4, M6 and M8).

Cuadro 3. Modelos de crecimiento base de altura dominante y reparametrización con el enfoque de diferencia algebraica (EDA: M1, M3, M5 y M7) y diferencia algebraica generalizada (EDAG: M2, M4, M6 y M8).

Base model/ Modelo base	Site-related parameter (χ) / Parámetro relacionado con el sitio (χ)	Solution for χ_0 under its initial condition (DH_1, A_1) / Solución para χ_0 en su condición inicial ($AD1, E1$)	Dynamic equation / Ecuación dinámica	Model / Modelo
Bailey and Clutter:	$\alpha_2 = \chi$	$\chi_0 = \frac{\ln \left[\frac{\ln(DH_1) - \beta_0}{\beta_1} \right]}{\ln(A_1)}$	$DH = e^{\left(\frac{\ln \left[\frac{\ln(DH_1) - \beta_0}{\beta_1} \right]}{\beta_0 + \beta_1 A_2} \right)}$	M1
$DH = e^{\alpha_0 + \alpha_1 A^{\alpha_2}}$	$\alpha_0 = \beta_0 + \chi$ $\alpha_1 = \beta_1 \chi$	$\chi_0 = \frac{\ln(DH_1) - \beta_0}{1 + \beta_1 A_1^{\beta_2}}$	$DH_2 = e^{\beta_0 + \chi_0 + \beta_1 \chi_0 A_2^{\beta_2}}$	M2
Chapman-Richards:	$\alpha_2 = \chi$	$\chi_0 = \frac{\ln \left(\frac{DH_1}{\beta_0} \right)}{\ln(1 - e^{-\beta_1 A_1})}$	$DH_2 = \beta_0 (1 - e^{-\beta_1 A_2})^{\frac{\ln \left(\frac{DH_1}{\beta_0} \right)}{\ln(1 - e^{-\beta_1 A_1})}}$	M3
$DH = \alpha_0 (1 - e^{-\alpha_1 A})^{\alpha_2}$	$\alpha_0 = e^{\chi}$ $\alpha_2 = \beta_1 + \frac{\beta_2}{\chi}$	$\chi_0 = 0.5(\ln(DH_1) - \beta_1 L_0 + R_0)$ $R_0 = \sqrt{(\ln(DH_1) - \beta_1 L_0)^2 - 4\beta_2 L_0}$ $L_0 = \ln(1 - e^{-\beta_0 A_1})$	$DH_2 = D_{H1} \left(\frac{1 - e^{-\beta_0 A_1}}{1 - e^{-\beta_0 A_2}} \right)^{\beta_1 + \frac{\beta_2}{\chi_0}}$	M4
Hossfeld IV:	$\alpha_0 = \chi$	$\chi_0 = \frac{A_1^{\beta_2}}{DH_1} - \beta_1 A_1^{\beta_2}$	$DH_2 = \frac{A_2^{\beta_2}}{\frac{A_1^{\beta_2}}{DH_1} + \beta_1 A_1^{\beta_2} + \beta_1 A_2^{\beta_2}}$	M5
$DH = \frac{A^{\alpha_2}}{\alpha_0 + \alpha_1 A^{\alpha_2}}$	$\alpha_0 = \beta_0 + \beta_1 \chi$ $\alpha_1 = \chi$	$\chi_0 = \frac{\frac{A_1^{\beta_2}}{DH_1} - \beta_0}{\beta_1 + A_1^{\beta_2}}$	$DH_2 = \frac{A_2^{\beta_2}}{\beta_0 + \beta_1 \chi_0 + \chi_0 A_2^{\beta_2}}$	M6
Levakovic II:	$\alpha_1 = \chi$	$\chi_0 = \frac{A_1}{e^{\left(\frac{\ln \left(\frac{DH_1}{\beta_0} \right)}{\beta_2} \right)}} - A_1$	$DH_2 = \beta_0 \left(A_1 \left(\left(\frac{A_1}{e^{\left(\frac{\ln \left(\frac{DH_1}{\beta_0} \right)}{\beta_2} \right)}} - A_1 \right) + A_1 \right)^{-1} \right)^{\beta_2}$	M7
$y = \alpha_0 \left(\frac{A}{\alpha_1 + A} \right)^{\alpha_2}$	$\alpha_0 = e^{\chi}$ $\alpha_2 = \frac{\beta_2}{\chi}$	$\chi_0 = \frac{\ln(DH_1) + \sqrt{(-\ln(DH_1))^2 - 4\beta_2 \ln \left(\frac{A_1}{\beta_1 + A_1} \right)}}{2}$	$DH_2 = e^{\chi_0} \left(\frac{A_2}{\beta_1 + A_2} \right)^{\frac{\beta_2}{\chi_0}}$	M8

DH = Dominant height; A = age; DH_1 and DH_2 = dominant height at ages A_1 and A_2 , respectively; α_i = parameters of the base model; β_i = parameters of the dynamic models of DH; $\ln$ = natural logarithm; e = exponential function.

AD = altura dominante; E = edad; AD_1 y AD_2 = altura dominante en la edad E_1 y E_2 , respectivamente; α_i = parámetros del modelo base; β_i = parámetros de los modelos dinámicos de AD; $\ln$ = logaritmo natural; e = función exponencial.

parameter estimates by assigning the initial dominant height of each plot, as this variable is site-specific (Nigh, 2015). This approach requires at least two measurements per plot, and the number of plots must exceed the number of global model parameters (Wang et al., 2020). The dummy variables were incorporated into the local parameter of the DH_{ij} function (Wang et al., 2020), and its formulation is shown in Equation 2.

$$DH_{ij} = f(A_{ij}, A_b; As, \beta) + \varepsilon_{ij}$$

$$As = \sum_{i=1}^N As_i d_i; \quad i = 1, 2, \dots, N$$

Eq.2

(Cieszewski et al., 2000) e indicar parámetros únicos al asignar la altura inicial de una parcela por ser específica del sitio (Nigh, 2015). Este enfoque requiere al menos dos mediciones por parcela y el número de parcelas debe ser mayor que el número de parámetros globales del modelo (Wang et al., 2020). Las variables *dummy* se integraron en el parámetro local de la función AD_{ij} (Wang et al., 2020) y su expresión se representa en la Ecuación 2.

$$AD_{ij} = f(E_{ij}, E_b; As, \beta) + \varepsilon_{ij}$$

$$As = \sum_{i=1}^N As_i d_i; \quad i = 1, 2, \dots, N$$

Eq.2

Where,

DH_{ij} = dominant height of the i -th plot at the j -th observation at A_{ij}

A_b = base age

As = vector of local parameters

β = vector of global parameter

ϵ_{ij} = random error for the i -th plot at the j -th observation

As_i = height of the i -th plot

d_i = plot-specific dummy variable, equal to 1 for the i -th plot and 0 otherwise

N = total number of plots and their respective observations (n_i).

The dummy-variable method used all available data for model fitting and was implemented using nonlinear generalized least squares with the 'gnls' function (Pinheiro et al., 2023) from the R statistical package (R Development Core Team, 2024). The Durbin-Watson (DW) statistic was used to detect potential autocorrelation; values of DW close to 2 indicate the absence of autocorrelation (Trim et al., 2020). Heteroscedasticity was assessed by graphical inspection of ϵ_{ij} and $\widehat{DH}_{ij}$, and normality was evaluated using the Kolmogorov-Smirnov test ($\alpha = 0.05$).

The significance of the parameters was assessed using the Student's t -test ($\alpha = 0.05$). The models were compared based on five statistical indicators: root mean square error (RMSE), adjusted coefficient of determination (R_a^2), Akaike information criterion (AIC), mean absolute bias (bias), and fit index (FI). RMSE quantifies the average error, R_a^2 evaluates model predictive accuracy, AIC measures goodness of fit, and absolute bias represents the average deviations between DH_{ij} and $\widehat{DH}_{ij}$ (Seki & Sakici, 2017).

The FI measured the proportion of variance explained by the model and is similar to R^2 . A particular feature of this index is that $\hat{A}_{ij}$ for the i -th plot at its j -th observation, when $j = n_i$, was the observed SI for each plot and was considered the reference point. The remaining observations for each plot were estimated using their respective SI function, $SI = f(H_{ij}, A_b, A_{ij}; \hat{\beta})$; while holding the value of $A_b = A_{ij}$ constant when $j = n_i$.

$$RMSE = \sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} \frac{(DH_{ij} - \widehat{DH}_{ij})^2}{(n_1 + n_2 + \dots + n_N) - p}} \quad \text{Eq. 3}$$

$$R_a^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^N n_i - 1 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} (DH_{ij} - \widehat{DH}_{ij})}{\sum_{i=1}^N n_i - p \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} (DH_{ij} - \widehat{DH}_{ij})} \quad \text{Eq. 4}$$

$$AIC = \sum_{i=1}^N n_i \hat{\sigma}^2 + 2p$$

$$\hat{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} \frac{(DH_{ij} - \widehat{DH}_{ij})^2}{(n_1 + n_2 + \dots + n_N) - p} \quad \text{Eq. 5}$$

Donde,

AD_{ij} = altura dominante de la i -ésima parcela en la j -ésima observación a una edad E_{ij}

E_b = edad base

As = vector de parámetros locales

β = vector de parámetros globales

ϵ_{ij} = error aleatorio de la i -ésima parcela en la j -ésima observación

As_i = altura en la i -ésima parcela

d_i = variable *dummy* por parcela que es igual a 1 para la i -ésima parcela y 0 de otra forma

N = número total de parcelas con sus respectivas observaciones (n_i).

El método de variable *dummy* utilizó todos los datos en el ajuste y se realizó con mínimos cuadrados generalizados no lineales con la función 'gnls' (Pinheiro et al., 2023) del paquete estadístico R (R Development Core Team, 2024). El estadístico de Durbin-Watson (DW) se usó para detectar posible autocorrelación; si DW es cercano a 2 no existe autocorrelación (Trim et al., 2020). La heterocedasticidad se evaluó mediante inspección gráfica de ϵ_{ij} y $\widehat{AD}_{ij}$ y la normalidad con la prueba de Kolmogorov-Smirnov ($\alpha = 0.05$).

La significancia de los parámetros se evaluó con la prueba *t-student* ($\alpha = 0.05$). Los modelos se compararon con base en cinco indicadores: raíz del cuadrado medio del error (RCME), coeficiente de determinación ajustada (R_a^2), criterio de información de Akaike (AIC), sesgo promedio absoluto (sesgo) y el índice de ajuste (IA). La RCME cuantifica el error medio, R_a^2 evaluó la precisión del modelo, el AIC midió la bondad de ajuste y el sesgo absoluto representó las desviaciones promedio de AD_{ij} y $\widehat{AD}_{ij}$ (Seki & Sakici, 2017).

El IA midió la proporción de la varianza que explica el modelo y es similar a R^2 . Tiene la particularidad de que $\hat{A}_{ij}$ en la i -ésima parcela de su j -ésima observación, cuando $j = n_i$, fue el IS observado de cada parcela y se consideró el punto de referencia. Las demás observaciones de cada parcela se estimaron con su propia función de $IS = f(A_{ij}, E_b, E_{ij}; \hat{\beta})$; manteniendo fijo el valor de $E_b = E_{ij}$ cuando $j = n_i$.

$$RCME = \sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} \frac{(AD_{ij} - \widehat{AD}_{ij})^2}{(n_1 + n_2 + \dots + n_N) - p}} \quad \text{Eq. 3}$$

$$R_a^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^N n_i - 1 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} (AD_{ij} - \widehat{AD}_{ij})}{\sum_{i=1}^N n_i - p \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} (AD_{ij} - \widehat{AD}_{ij})} \quad \text{Eq. 4}$$

$$AIC = \sum_{i=1}^N n_i \hat{\sigma}^2 + 2p$$

$$\hat{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} \frac{(AD_{ij} - \widehat{AD}_{ij})^2}{(n_1 + n_2 + \dots + n_N) - p} \quad \text{Eq. 5}$$

$$Bias = \frac{|\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} (DH_{ij} - \widehat{DH}_{ij})|}{(n_1 + n_2 + \dots + n_N)} \quad \text{Eq. 6}$$

$$FI = 1 - \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} (DH_{ij} - \widehat{DH}_{ij})^2}{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} (DH_{ij} - \overline{DH}_{ij})^2} \quad \text{Eq. 7}$$

Where DH_{ij} , $\widehat{DH}_{ij}$ and $\overline{DH}_{ij}$ represent the observed, estimated and mean dominant height values, $\hat{\sigma}^2$ is the estimated error variance and p is the number of model parameters.

Due to the limited amount of data available, a validation procedure was not carried out. Instead, the relative ranking (RR) method proposed by Poudel and Cao (2013) was used to rank each model based on the statistical indicators. The RR method provides an exact ranking of each model statistic relative to those of the other models (Trim et al., 2020). The RR for RMSE, AIC, and bias was calculated using Equation 8, and the RR for R_a^2 and FI was calculated using Equation 9:

$$RR_i = 1 + \left(\frac{(w-1)(S_i - S_{\min})}{S_{\max} - S_{\min}} \right) \quad \text{Eq. 8}$$

$$RR_i = 1 + \left(\frac{(w-1)(S_{\max} - S_i)}{S_{\max} - S_{\min}} \right) \quad \text{Eq. 9}$$

where, w is the number of models included in the test, S_i is the value of the statistic, and $S_{\min}$ and $S_{\max}$ are the minimum and maximum values of the statistics, respectively. The lowest sum of the RR values among the statistical indicators was considered the best overall ranking. Using the selected model, SI and DH growth curves were plotted at a base age of 40 years, which is close to the rotation age of both species (Kahrman et al., 2018). Three SI classes were used to classify potential productivity as low, medium and high, and these curves were overlaid on the observed data.

Results

Most parameters of the models fitted for *P. patula* were statistically significant ($P < 0.05$), with the exception of four parameters associated with models M4 and M6 under the GADA approach. For *A. religiosa*, all parameters of the ADA models were statistically significant ($P < 0.05$); however, at least one parameter of the GADA models was not statistically significant ($P > 0.05$) (Table 4). Overall, the ADA models had better parameters statistics than the GADA models.

The models yielded high adjusted R_a^2 (>98 %) (Table 4), which was also consistent with the low absolute bias values. The RMSE was low, with lower values for *A. religiosa* (0.43 m a 0.48 m) than for *P. patula* (0.64 m a 0.66 m). In terms of AIC, the results were similar among models within each species.

$$Sesgo = \frac{|\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} (AD_{ij} - \widehat{AD}_{ij})|}{(n_1 + n_2 + \dots + n_N)} \quad \text{Eq. 6}$$

$$IA = 1 - \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} (AD_{ij} - \widehat{AD}_{ij})^2}{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} (AD_{ij} - \overline{AD}_{ij})^2} \quad \text{Eq. 7}$$

Donde AD_{ij} , $\widehat{AD}_{ij}$ y $\overline{AD}_{ij}$ son el valor observado, estimado y promedio de altura dominante, $\hat{\sigma}^2$ es la varianza del error estimada y p el número de parámetros del modelo.

Debido a la cantidad limitada de datos no se aplicó un procedimiento de validación. En su lugar se empleó el método de *ranking* relativo (RR) propuesto por Poudel y Cao (2013), para cada modelo con los indicadores estadísticos. El RR posiciona, de manera exacta, el estadístico del modelo respecto a los otros modelos (Trim et al., 2020). El RR para el RCME, AIC y sesgo se obtuvo con la Ecuación 8 y para R_a^2 e IA con la Ecuación 9:

$$RR_i = 1 + \left(\frac{(w-1)(S_i - S_{\min})}{S_{\max} - S_{\min}} \right) \quad \text{Eq. 8}$$

$$RR_i = 1 + \left(\frac{(w-1)(S_{\max} - S_i)}{S_{\max} - S_{\min}} \right) \quad \text{Eq. 9}$$

donde, w es el número de modelos utilizados en la prueba, S_i es el valor del estadístico y $S_{\min}$ y $S_{\max}$ son los valores máximos y mínimos de los estadísticos. El valor menor de la suma de los RR de cada estadístico fue la mejor calificación. Con el modelo seleccionado se graficaron las curvas de IS y crecimiento de AD a una edad base de 40 años, que es cercana al turno de ambas especies (Kahrman et al., 2018). Se utilizaron tres IS para clasificar la productividad potencial en baja, intermedia y alta, y se sobrepusieron con las observaciones.

Resultados

Los parámetros de los modelos ajustados para *P. patula* fueron, en su mayoría, estadísticamente significativos ($P < 0.05$), con excepción de cuatro parámetros correspondientes a los modelos M4 y M6 bajo el enfoque EDAG. Para *A. religiosa*, los parámetros de los modelos EDA fueron significativos ($P < 0.05$); sin embargo, al menos un parámetro de EDAG no fue significativo ($P > 0.05$) (Cuadro 4). En general, los modelos EDA fueron superiores en los estadísticos de los parámetros que EDAG.

Los modelos obtuvieron valores altos de R_a^2 (>98 %) (Cuadro 4), acorde también con los valores bajos del sesgo absoluto. La RCME fue baja con valores menores para *A. religiosa* (0.43 m a 0.48 m) que para *P. patula* (0.64 m a 0.66 m). En términos del AIC, los resultados fueron similares entre modelos por especie.

Table 4. Estimated parameters, standard errors (in parentheses), and statistical evaluation of eight dominant height growth models for *Pinus patula* and *Abies religiosa* using the algebraic difference approach (M1, M3, M5 and M7) and generalized algebraic difference approach (M2, M4, M6 and M8).

Cuadro 4. Parámetros estimados, error estándar (entre paréntesis) y evaluación estadística de ocho modelos de crecimiento de altura dominante de *Pinus patula* y *Abies religiosa* con el enfoque de diferencia algebraica (M1, M3, M5 y M7) y diferencia algebraica generalizada (M2, M4, M6 y M8).

Species/ Especie	Model/ Modelo	β_0	β_1	β_2	RMSE/ RCME	AIC	Absolute bias/ Sesgo absoluto	R^2_a	FI/IA	DW
<i>P. patula</i>	M1	4.416 (0.197)	-8.573 (0.704)	-	0.655	947.6	0.0008	0.988	0.873	2.540
<i>P. patula</i>	M2	4.042 (0.215)	-13.216 (6.619)	-0.5 (0.07)	0.642	931.1	0.0006	0.988	0.837	2.483
<i>P. patula</i>	M3	42.90 (3.216)	0.035 (0.005)	-	0.650	940.8	0.001	0.988	0.818	2.462
<i>P. patula</i>	M4	0.044 (0.006)	-11.956* (7.759)	48.866* (28.296)	0.646	936.6	0.0004	0.988	0.835	2.495
<i>P. patula</i>	M5	-	0.022 (0.002)	1.482 (0.076)	0.642	930.3	0.0002	0.988	0.855	2.517
<i>P. patula</i>	M6	22.771* (16.594)	-952.506* (731.777)	1.443 (0.074)	0.642	930.4	0.0004	0.988	0.850	2.507
<i>P. patula</i>	M7	57.245 (4.25)	-	2.051 (0.321)	0.642	930.3	0.0003	0.988	0.853	2.512
<i>P. patula</i>	M8	-	19.934 (6.124)	7.426 (0.952)	0.657	949.2	0.0009	0.987	0.872	2.548
<i>A. religiosa</i>	M1	4.855 (0.556)	-6.566 (0.666)	-	0.479	252.1	0.0001	0.992	0.929	2.540
<i>A. religiosa</i>	M2	3.911 (0.195)	-4.015* (2.587)	-0.289 (0.127)	0.443	228.6	0.0001	0.993	0.905	2.618
<i>A. religiosa</i>	M3	48.427 (6.434)	0.02 (0.006)	-	0.439	225.2	0.0001	0.993	0.904	2.613
<i>A. religiosa</i>	M4	0.021 (0.008)	-67.281* (287.675)	263.091* (1114.538)	0.441	227.1	0.0001	0.993	0.905	2.608
<i>A. religiosa</i>	M5	-	0.017 (0.003)	1.125 (0.129)	0.454	235.3	0.0001	0.993	0.920	2.578
<i>A. religiosa</i>	M6	1.505* (0.951)	-65.933* (42.782)	0.919 (0.12)	0.452	210.5	0.0111	0.993	0.914	2.619
<i>A. religiosa</i>	M7	64.232 (8.928)	-	1.186 (0.248)	0.454	235.5	0.0001	0.993	0.920	2.583
<i>A. religiosa</i>	M8	-	87.261* (61.779)	4.117 (0.531)	0.465	242.5	0.0004	0.992	0.925	2.655

*Non-significant parameter ($P > 0.05$), β_i = estimated parameters, RMSE root mean square error, AIC = Akaike information criterion, R^2_a = adjusted coefficient of determination, FI = fit index, DW = Durbin-Watson statistic.

*Parámetro no significativo ($P > 0.05$), β_i = parámetros estimados, RCME = raíz del cuadrado media del error, AIC = criterio de información de Akaike, R^2_a = coeficiente de determinación ajustada, IA = índice de ajuste, DW = valor del estadístico de Durbin-Watson.

The FI values were lower than the adjusted coefficients of determination (R^2_a), because the former quantifies retrospective variation from a reference point of SI in the current observation of each plot. The FI values for the *P. patula* models explained 81 to 87 % of the variation in the observations, whereas those for *A. religiosa* ranged from 91 to 93 %.

The DW statistic for all models was close to 2 but slightly greater than 2, indicating possible negative autocorrelation in the residuals. In a preliminary

Los valores del IA fueron menores que el R^2_a , debido a que el primero explica la variación retrospectiva a partir de un punto de referencia del IS en la observación actual de cada parcela. El IA de los modelos de *P. patula* explicaron de 81 a 87 % de la variación de las observaciones, mientras que el IA para *A. religiosa* fue de 91 a 93 %.

El estadístico DW de todos los modelos estuvo cercano a 2 pero ligeramente superior, lo cual indica una posible autocorrelación negativa en los residuales. En un análisis preliminar, los modelos se evaluaron con una

analysis, the models were evaluated using an autocorrelation structure, specifically a first-order autoregressive structure of order 1 – AR1; however, this increased the DW statistic (results not shown). Therefore, an autocorrelation structure was not incorporated into the final models.

Based on the models' rankings and considering parameter significance, M5 for *P. patula* received the highest rating, with lower RMSE, AIC, and absolute bias values and a higher R^2_a while ranking third in terms of FI (Table 5). Therefore, M5 achieved the best overall ranking and was selected for estimating DH and SI for *P. patula*.

For *A. religiosa*, model M3 showed the lowest RMSE, absolute bias, and R^2_a values, while its AIC ranked second among the evaluated models. In terms of the FI, M3 received the lowest score (Table 5). The difference between the minimum and maximum FI values among models was only 2 % (Table 4); therefore, M3 was selected as the best model for estimating DM and SI for *A. religiosa*.

The selected polymorphic models correspond to the Hossfeld IV and Chapman-Richards functions for *P. patula* and *A. religiosa*, respectively. These models showed a random pattern of residuals relative to the predicted values, with no significant evidence of heteroscedasticity (Figure 2). The Kolmogorov-Smirnov test, with $P = 0.25$ and $P = 0.82$ for *P. patula* and *A. religiosa*, respectively, indicated that the residuals followed a normal distribution.

RMSE and bias were evaluated by age classes (Figure 3). For *P. patula*, the RMSE of M5 increased with stand age, likely as a result of the lower number of observations in intermediate and mature age classes (Figure 3A). In contrast, M3 for *A. religiosa* showed the opposite pattern, with fewer observations in the younger age classes (Figure 3B).

The age classes of *A. religiosa* (Figure 3C) showed greater error stability than those of *P. patula* (Figure 3D). The M5 model for *P. patula* tended to slightly overestimate the penultimate age class (37-39 years) and underestimate the final age class (39-41 years). Both models provided reliable estimates for predicting dominant height growth.

The predictive capacity of the selected models was evaluated graphically, confirming the satisfactory performance of DH growth estimates (Figure 4). These estimates showed the biological properties expected of a growth model, including polymorphism, an asymptotic trend at mature ages, an origin at age zero, and sigmoidal growth.

estructura de autocorrelación (i. e., un autorregresivo de orden 1 – AR1), lo cual aumentó el valor de DW (resultados no mostrados), por tal razón no se integró una estructura de autocorrelación.

Conforme a los RR de los modelos y considerando la significancia de los parámetros, el M5 de *P. patula* obtuvo mejor calificación (menores RCME, AIC, sesgo absoluto y mayor R^2_a) y ocupó el tercer lugar en el IA (Cuadro 5). Por lo tanto, el M5 obtuvo el mejor *ranking* y se seleccionó para realizar estimaciones de AD e IS para *P. patula*.

Para *A. religiosa*, el modelo M3 presentó los valores más bajos de RCME, sesgo absoluto y R^2_a , pero el AIC ocupó el segundo lugar. Respecto al IA, el M3 obtuvo la menor calificación respecto a los otros modelos (Cuadro 5). La variación del menor y mayor valor entre los modelos de este estadístico fue en un intervalo de 2 % (Cuadro 4), por lo que M3 se seleccionó como el mejor modelo de AD e IS para oyamel.

Los modelos seleccionados de tipo polimórfico corresponden a las funciones de Hossfeld IV y Chapman-Richards para *P. patula* y *A. religiosa*, respectivamente. Estos mostraron un patrón aleatorio en los errores respecto a los valores predichos sin tendencia significativa de heterocedasticidad (Figura 2). La prueba de Kolmogorov-Smirnov con valores $P = 0.25$ y $P = 0.82$ para *P. patula* y *A. religiosa*, respectivamente, demostraron normalidad en los residuales.

La RCME y el sesgo se analizaron por medio de clases de edades (Figura 3). La RCME de M5 para *P. patula* mostró una tendencia creciente a medida que la edad aumenta, lo que se debe a la menor cantidad de observaciones en edades intermedias a maduras (Figura 3A). Para *A. religiosa*, M3 mostró un patrón inverso al anterior con una menor cantidad de observaciones en edades juveniles (Figura 3B).

Las clases de edad de *A. religiosa* (Figura 3C) tuvieron mejor estabilidad en el error con respecto a *P. patula* (Figura 3D). El M5 de *P. patula* tiende a sobrestimar ligeramente la penúltima clase de edad (37-39 años) y a subestimar la última clase de edad (39-41 años). Los dos modelos mostraron estimaciones confiables para la predicción del crecimiento de AD.

La capacidad predictiva de los modelos seleccionados se evaluó de forma gráfica y se confirmó el buen comportamiento de las estimaciones del crecimiento en AD (Figura 4). Estas proporcionaron todas las propiedades biológicas posibles de un modelo; por ejemplo, polimorfismo, asíntota en edades maduras, punto de origen en el tiempo cero y crecimiento sigmoideo.

Table 5. Ranking and evaluation of eight dominant height models using the algebraic difference approach (ADA: M1, M3, M5 and M7) and generalized algebraic difference approach (GADA: M2, M4, M6 and M8) to select the best model for *Pinus patula* and *Abies religiosa*.

Cuadro 5. Calificación y evaluación de ocho modelos de altura dominante con el enfoque de diferencia algebraica (EDA: M1, M3, M5 y M7) y diferencia algebraica generalizada (EDAG: M2, M4, M6 y M8), para seleccionar el mejor modelo de *Pinus patula* y *Abies religiosa*.

Species/ Especie	Model/ Modelo	Relative ranking/ Ranking relativo					Additive ranking/ Ranking aditivo
		RMSE/ RCME	AIC	Bias/ Sesgo	R ² _a	FI/ IA	
<i>Pinus patula</i>	M1	7.389	7.392	6.250	6.833	1.000	28.065
	M2	1.235	1.321	4.500	1.000	5.609	9.178
	M3	4.946	4.89	8.000	4.500	8.000	23.937
	M4	3.208	3.331	2.750	3.333	5.786	13.779
	M5	1.141	1.024	1.000	1.000	3.304	4.826
	M6	1.000	1.050	2.750	1.000	3.980	6.596
	M7	1.141	1.000	1.875	1.000	3.502	5.716
	M8	8.000	8.000	7.125	8.000	1.136	31.352
<i>Abies religiosa</i>	M1	8.000	8.000	1.063	8.000	1.000	25.263
	M2	1.73	4.043	1.000	2.000	7.578	10.289
	M3	1.000	3.478	1.000	1.000	8.000	8.078
	M4	1.365	3.798	1.063	1.500	7.737	9.274
	M5	3.553	5.176	1.063	3.500	3.534	13.999
	M6	3.171	1.000	8.000	3.000	5.015	16.174
	M7	3.605	5.212	1.063	3.500	3.469	14.075
	M8	5.447	6.391	1.252	5.500	1.936	18.977

RMSE = root mean square error, AIC = Akaike information criterion, R²_a = adjusted coefficient of determination, FI = fit index.

RCME = raíz del cuadrado medio del error, AIC = criterio de información de Akaike, R²_a = coeficiente de determinación ajustada, IA = índice de ajuste.

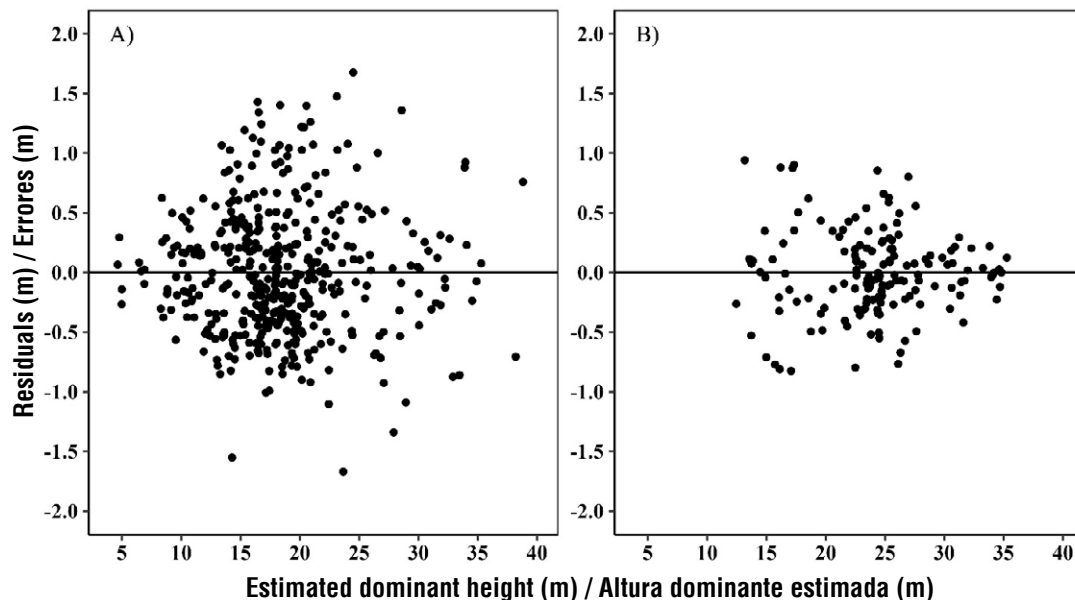


Figure 2. Residual dispersion relative to predicted values for the dominant height models: A) Hossfeld IV model (M5) for *Pinus patula* and B) Chapman-Richards model (M3) for *Abies religiosa*.

Figura 2. Dispersión de los residuales respecto a los valores predichos en los modelos de altura dominante: A) modelo Hossfeld IV (M5) de *Pinus patula* y B) modelo de Chapman-Richards (M3) de *Abies religiosa*.

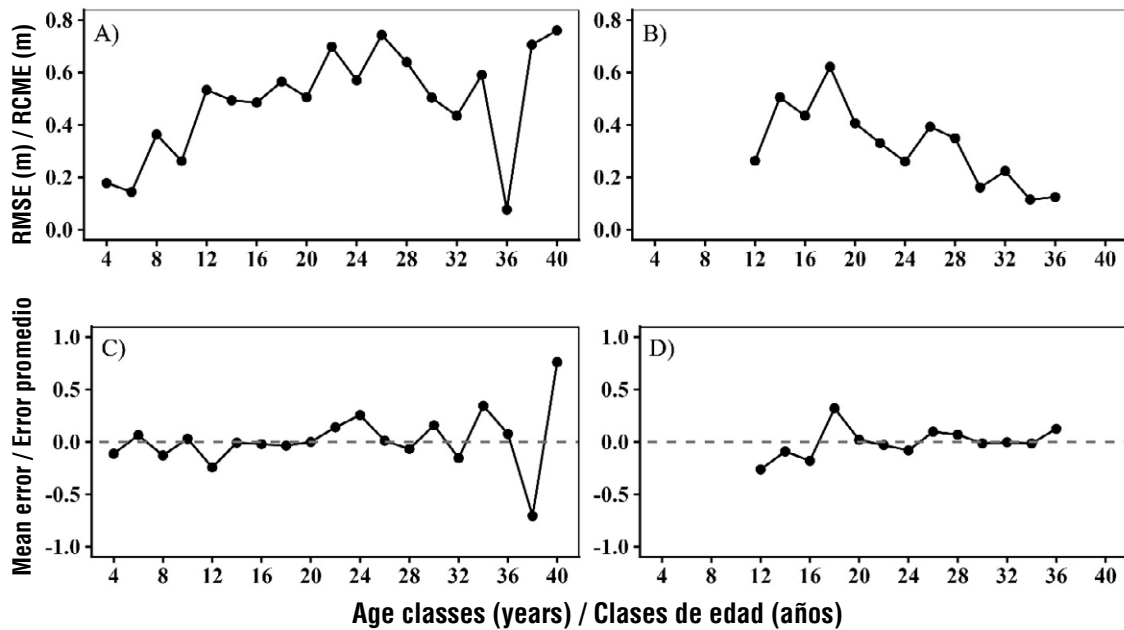


Figure 3. Root mean square error (RMSE) and mean error by two-year age classes. Panels A and C correspond to the Hossfeld IV model (M5) for *Pinus patula*, whereas panels B and D correspond to the Chapman-Richards model (M3) for *Abies religiosa*.

Figura 3. Raíz del cuadrado medio del error (RCME) y error promedio por clases de edad de dos años. Los paneles A y C corresponden al modelo Hossfeld IV (M5) de *Pinus patula*. Los paneles B y D corresponden al modelo de Chapman-Richards (M3) de *Abies religiosa*.

The three proposed SI curves satisfactorily encompassed the observed growth patterns (Figure 4). In *P. patula*, SI of 25, 29 y 33 m were used, whereas SI of 22, 27 and 32 m were used for *A. religiosa*. These three SI classes (low, medium, and high) can be used to classify the productive potential of stands in the study area and thereby support the determination of the intensity of silvicultural treatments specified in the management plan. The final models for DH and SI for each species are as follows.

Pinus patula:

$$DH_2 = \frac{A_2^{1.482}}{\frac{A_1^{1.482}}{DH_1} - 0.022 \times A_1^{1.482} + 0.022 \times A_2^{1.482}}$$

$$SI = \frac{A_b^{1.482}}{\frac{A^{1.482}}{DH} - 0.022 \times A^{1.482} + 0.022 \times A_b^{1.482}}$$

Abies religiosa:

$$DH_2 = 48.427 \times (1 - e^{-0.02 \times A_2})^{\frac{\ln(\frac{DH_1}{48.427})}{\ln(1 - e^{-0.02 \times A_1})}}$$

$$SI = 48.427 \times (1 - e^{-0.02 \times A_b})^{\frac{\ln(\frac{DH}{48.427})}{\ln(1 - e^{-0.02 \times A})}}$$

Los tres IS propuestos cubrieron de manera satisfactoria los patrones de crecimiento observados (Figura 4). En *P. patula* se utilizaron los IS 25, 29 y 33 m; en *A. religiosa* se utilizaron 22, 27 y 32 m. Con estos tres IS (bajo, medio y alto) se puede clasificar el potencial productivo de los rodales del área, de tal modo que sean útiles para definir la intensidad de tratamientos silvícolas establecidos en el plan de manejo. Los modelos finales por especie de AD e IS son los siguientes.

Pinus patula:

$$AD_2 = \frac{E_2^{1.482}}{\frac{E_1^{1.482}}{AD_1} - 0.022 \times E_1^{1.482} + 0.022 \times E_2^{1.482}}$$

$$IS = \frac{E_b^{1.482}}{\frac{E^{1.482}}{AD} - 0.022 \times E^{1.482} + 0.022 \times E_b^{1.482}}$$

Abies religiosa:

$$AD_2 = 48.427 \times (1 - e^{-0.02 \times E_2})^{\frac{\ln(\frac{AD_1}{48.427})}{\ln(1 - e^{-0.02 \times E_1})}}$$

$$IS = 48.427 \times (1 - e^{-0.02 \times E_b})^{\frac{\ln(\frac{AD}{48.427})}{\ln(1 - e^{-0.02 \times E})}}$$

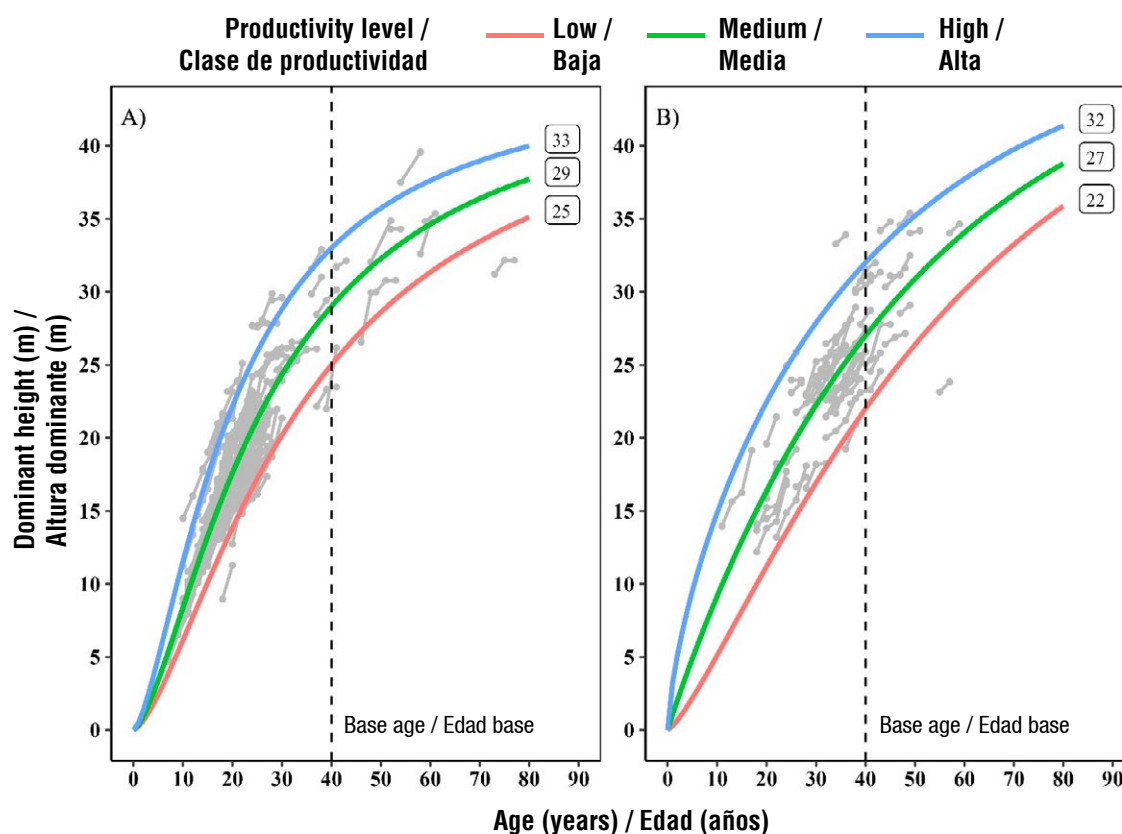


Figure 4. Site index curves overlaid on observed dominant height (gray lines): A) Hossfeld IV model for *Pinus patula* and B) Chapman-Richards model for *Abies religiosa*.

Figura 4. Curvas de índice de sitio sobrepuestas con altura dominante observada (líneas color gris): A) modelo Hossfeld IV para *Pinus patula* y B) modelo Chapman-Richards para *Abies religiosa*.

Discussion

The dominant height growth models developed in this and other studies published in Mexico differ for *P. patula* (Nava-Nava et al., 2022) and *A. religiosa* (Guzmán-Santiago et al., 2021). For *P. patula*, a regional Korf-type equation developed by SiBiFor is available for UMAFOR 2108 (Vargas-Larreta et al., 2017). A Chapman-Richards-type equation is also available for *A. religiosa* in UMAFOR 2105, Pico de Orizaba, which is located near the study region (Guzmán-Santiago et al., 2021). Notably, both models were developed using the GADA approach, which contrasts with the findings of the present study, in which the models based on ADA showed better performance.

Figure 5 compares DH growth and SI curves proposed by SiBiFor for *P. patula* and by Guzmán-Santiago et al. (2021) for *A. religiosa*. The SiBiFor results underestimated DH growth in all three SI classes relative to the results of the present study (Figure 5, A). In contrast, the SI curves reported by Guzmán-Santiago et al. (2021) tended to underestimate DH growth at ages younger than 40 years and subsequently overestimate it at older ages (Figure 5B).

Discusión

Los modelos de crecimiento de AD desarrollados en este y otros trabajos publicados en México son diferentes para *P. patula* (Nava-Nava et al., 2022) y *A. religiosa* (Guzmán-Santiago et al., 2021). Para *P. patula* se cuenta con una ecuación regional de tipo Korf, desarrollada por el SiBiFor, para la UMAFOR 2108 (Vargas-Larreta et al., 2017). También existe una ecuación de tipo Chapman-Richards para *A. religiosa* de la UMAFOR 2105 Pico de Orizaba cercana a la región de estudio (Guzmán-Santiago et al., 2021). Cabe señalar que ambos modelos se desarrollaron bajo el enfoque de EDAG, lo que contrasta con los resultados del presente estudio, donde los modelos basados en EDA mostraron mejor desempeño.

La Figura 5 muestra la comparación de las curvas de crecimiento de AD e IS para *P. patula* propuestas en el SiBiFor y para *A. religiosa* por Guzmán-Santiago et al. (2021). Se observa que los resultados del SiBiFor subestiman el crecimiento de AD en las tres clases de IS con respecto a los resultados de este estudio (Figura 5A), mientras que las curvas de IS de Guzmán-Santiago et al. (2021) tienden a subestimar el crecimiento

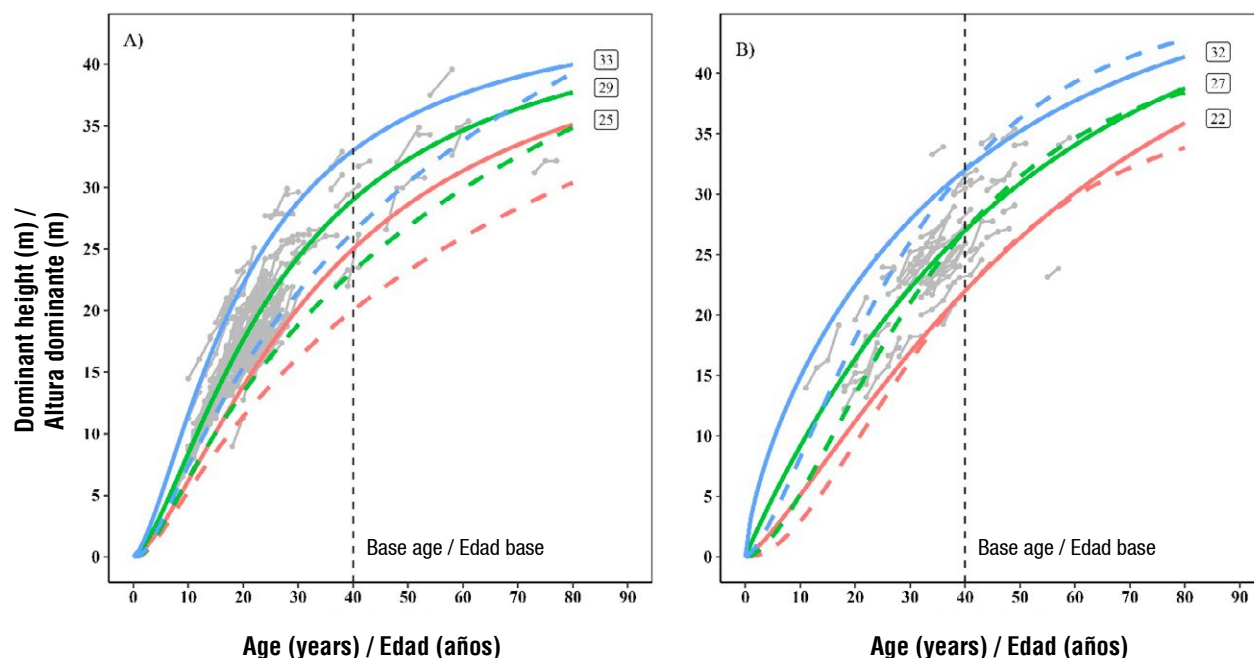


Figure 5. Observed growth (gray lines) and SI curves developed in the present study (solid lines). Dashed lines represent the growth curves proposed by SiBiFor for *Pinus patula* (A) and by Guzmán-Santiago et al. (2021) for *Abies religiosa* (B).

Figura 5. Crecimiento observado (color gris) y curvas de SI de esta investigación (líneas sólidas). Las líneas punteadas representan curvas de crecimiento propuestas por SiBiFor para *Pinus patula* (A) y por Guzmán-Santiago et al. (2021) para *Abies religiosa* (B).

The estimates generated by the SiBiFor and Guzmán-Santiago et al. (2021) models provided unsatisfactory representation of the observed DH growth in the study area. This may be attributed to the small sample sizes used in both studies: 20 *P. patula* trees used by SiBiFor and eight *A. religiosa* trees used by Guzmán-Santiago et al. (2021). This suggests that the full range of ecological, edaphic, and climatic conditions in the region was not adequately represented. These findings highlight the importance of developing local models for predicting and projecting DH growth, provided that the samples used in the analyses encompass a broad range of site conditions (Socha et al., 2021). The equations presented above, together with those developed in the present study, may provide an alternative for classifying productive potential at sites where such tools are unavailable but that share conditions similar to those represented in these three studies.

The dummy variable method produced satisfactory results. This approach has also been used in other studies involving *Cedrus libani* A. Rich (Özçelik et al., 2019), *Pinus densiflora* (Pyo, 2017) and *Pinus tadea* L. (Wang et al., 2020). In Mexico, other studies on *P. patula* have used methods such as the iterative approach (Nava-Nava et al., 2022) and seemingly unrelated regression (Santiago-García et al., 2015). For *A. religiosa*, the iterative approach has also been used to develop 12 site index models in several regions of the country (Guzmán-Santiago et al., 2021).

de AD en edades menores de 40 años y posteriormente lo sobrestiman (Figura 5B).

Las estimaciones generadas por los modelos del SiBiFor y Guzmán-Santiago et al. (2021) no cubren satisfactoriamente el crecimiento de AD observado en el área de estudio. Lo anterior se atribuye al tamaño pequeño de muestra de ambas investigaciones: 20 árboles de *P. patula* utilizados por el SiBiFor y ocho árboles de *A. religiosa* utilizados por Guzmán-Santiago et al. (2021). Esto sugiere que no se incluyó toda la variabilidad de las condiciones ecológicas, edáficas y climáticas de la región. Lo anterior resalta la importancia de la generación de modelos locales para la predicción y proyección del crecimiento de AD, siempre que la muestra utilizada en los análisis cubra la mayor parte de las condiciones del sitio (Socha et al., 2021). Las ecuaciones antes expuestas y las del presente trabajo pueden ser una alternativa para clasificar el potencial productivo en sitios que no cuenten con este tipo de herramientas, pero que comparten las condiciones de estos tres estudios.

El método de variables *dummy* generó resultados satisfactorios. Este mismo método se utilizó en otros estudios con *Cedrus libani* A. Rich (Özçelik et al., 2019), *Pinus densiflora* (Pyo, 2017) y *Pinus tadea* L. (Wang et al., 2020). En México, en otros trabajos de *P. patula* se utilizaron métodos como el iterativo (Nava-Nava et al., 2022) o regresión aparentemente no relacionada

The reparameterization of models using dummy variables offers important advantages because its structure resembles that of a mixed-effects model and facilitates convergence (Wang et al., 2020). The dummy variable and mixed-effects model approaches are part of the same site-specific modeling framework (Cieszewski & Strub, 2018). Several studies have shown that both approaches provide similar estimates of DH and SI (Orrego et al., 2021; Sprengel et al., 2022; Wang et al., 2008). Conversely, the potential of the dummy variable approach has been highlighted because it can provide better estimates than mixed-effects models (Cieszewski & Strub, 2018; Nigh, 2015), as well as greater consistency with the base-age invariance property (Cieszewski & Strub, 2018).

Incorporating an autocorrelation structure improves the interpretation of the model's statistical properties (Kahriman et al., 2018). Longitudinal data generally present a particular challenge because of autocorrelation within the observational unit (*i.e.* plots) (Özçelik et al., 2019). In the present study, an autocorrelation structure was not incorporated because the inclusion of an AR1 structure provided no improvement in the DW statistic. Nord-Larsen (2006) reported similar results, concluding that incorporating an autocorrelation structure provides little improvement and that this component has limited practical applicability (Wang et al., 2020). Ni and Zhang (2007) noted that the dummy variable approach can minimize the effect of autocorrelation because the data structure used for model fitting accounts for part of the autocorrelation and can yield valid statistical estimates, such as parameter standard errors.

The PSP used in this study included stands in which *P. patula* and *A. religiosa* were dominant in terms of basal area, while other coniferous and broadleaved species were also present. This allowed for the development of models to estimate productive potential in mixed-species stands in the study area. A similar study was conducted by Quiñonez-Barraza et al. (2015), who analyzed five dominant species in mixed-species coniferous forest in Durango, Mexico, and reported that SI depends on the most abundant species in the stand, as suggested in the present study. Seki and Sakici (2017) highlighted the importance of developing SI models applicable to mixed-species stands to evaluate the productivity of each dominant species. These findings support adapting methods developed for even-aged, monospecific stands to construct SI and DH growth models for mixed-species stands (Dais et al., 2023).

Conclusions

The polymorphic Hossfeld IV and Chapman-Richards models fitted using the algebraic difference approach were selected to estimate dominant height growth

(Santiago-García et al., 2015); en el caso de *A. religiosa* también se utilizó el método iterativo para la construcción de 12 modelos de IS en varias regiones del país (Guzmán-Santiago et al., 2021).

La reparametrización de los modelos con variables *dummy* tiene ventajas importantes, ya que su estructura se asemeja a la de un modelo mixto y converge con mayor facilidad (Wang et al., 2020). Los métodos de variables *dummy* y modelo mixto forman parte del mismo esquema de modelación específica del sitio (Cieszewski & Strub, 2018). Algunos estudios mostraron que ambos enfoques presentan estimaciones similares en AD e IS (Orrego et al., 2021; Sprengel et al., 2022; Wang et al., 2008). Por otro lado, se ha resaltado el potencial que tiene el método de variable *dummy*, ya que genera estimaciones superiores a las de un modelo mixto (Cieszewski & Strub, 2018; Nigh, 2015), así como una mejor consistencia con la propiedad de invarianza de la edad base (Cieszewski & Strub, 2018).

La incorporación de una estructura de autocorrelación mejora la interpretación de las propiedades estadísticas del modelo (Kahriman et al., 2018). Generalmente, los datos longitudinales tienen un problema especial con la autocorrelación dentro de la unidad de observación (*i.e.* parcelas) (Özçelik et al., 2019). En esta investigación no se integró una estructura de autocorrelación, debido a que no mejoró el valor DW cuando se incluyó un AR1. El mismo resultado obtuvo Nord-Larsen (2006), quien concluyó que existe poca mejoría al integrar una estructura de autocorrelación, además de que este componente no tiene aplicación práctica (Wang et al., 2020). Ni y Zhang (2007) mencionaron que el método de variable *dummy* puede minimizar el efecto de autocorrelación, ya que la estructura de datos que se utiliza en el ajuste toma en cuenta parte de la autocorrelación y puede producir estadísticos válidos como los errores estándar de los parámetros.

Las PPM utilizadas en esta investigación incluyeron datos donde dominan *P. patula* y *A. religiosa* en área basal, pero coexisten otras especies de coníferas y latifoliadas; esto permitió el desarrollo de modelos para estimar el potencial productivo en rodales mixtos del área de estudio. Un estudio similar fue desarrollado por Quiñonez-Barraza et al. (2015), quienes analizaron cinco especies dominantes en bosques de coníferas con mezcla de especies en Durango, México e indicaron que el IS está en función de la especie más abundante en el rodal como se sugiere en este trabajo. Seki y Sakici (2017) resaltan la importancia de contar con modelos de IS aplicados a rodales mezclados para evaluar la productividad de cada especie dominante. Esto da lugar a retomar los métodos desarrollados en rodales coetáneos y monoespecíficos para la construcción de modelos de crecimiento de AD e IS aplicado a rodales con mezcla de especies (Dais et al., 2023).

and site index for *Pinus patula* and *Abies religiosa*, respectively. Dummy variables allowed for the estimation of site-specific and global parameters. The estimated parameters were statistically consistent, and the dominant height growth curves satisfactorily encompassed the dispersion of the observed data. The dominant height growth equations will enable foresters to classify the productive potential of mixed-species stands in the study area, particularly at sites where *P. patula* or *A. religiosa* is dominant in terms of basal area. This biometric tool will support forest management decision-making by helping determine the intensity and timing of thinning operations according to the rotation established for the study area.

Acknowledgments

The authors thank the Consejo Nacional de Humanidades, Ciencia y Tecnología (CONAHCYT), now Secretaría de Ciencia, Humanidades, Tecnología e Innovación (SECIHTI), for providing financial support to the first author to pursue a Doctor of Science degree (Support No. 814397). The authors also thank the partners of the Reserva Forestal Multifuncional 'El Manantial' in Aquixtla, Puebla, for providing access to the databases and forests used in this study. Finally, the authors acknowledge the Colegio de Postgraduados for providing the facilities and support necessary to carry out this research.

Conflict of Interest Declaration

The authors declare that they have no economic conflicts of interest or known personal relationships that could have influenced the research presented in this article.

Declaration of Artificial Intelligence (AI) Use

The authors declare that no generative AI or AI-assisted technology was used in the preparation of this manuscript.

End of English version

References / Referencias

- Bailey, R. L., & Clutter, J. L. (1974). Base-age invariant polymorphic site curves. *Forest Science*, 20(2), 155-159. <https://doi.org/10.1093/forestscience/20.2.155>
- Barrón, A. J. S. (2021). Biodiversidad y manejo forestal en la Sierra Norte de Puebla. *Elemento*, 28(3), 45-49. <https://elementos.buap.mx/post.php?id=671>
- Castañón-Martínez, L. J., & Castro-Zavala, S. (2014). *Manejo forestal: Reserva Forestal Multifuncional "El Manantial" SC. Conceptos, conductas y acciones*. <https://files.acquia.undp.org/public/migration/latinamerica/UNDP-RBLAC-ManejoForestalMX.pdf>

Conclusiones

Los modelos polimórficos de Hossfeld IV y Chapman-Richards con diferencia algebraica, se seleccionaron para estimar el crecimiento de altura dominante e índice de sitio para *Pinus patula* y *Abies religiosa*, respectivamente. Las variables *dummy* permitieron estimar parámetros específicos y globales. Los parámetros estimados fueron estadísticamente consistentes y las curvas de crecimiento de altura dominante cubrieron la dispersión de las observaciones de forma satisfactoria. Las ecuaciones de crecimiento de altura dominante permitirán a los silvicultores clasificar el potencial productivo de rodales con mezcla de especies del área de estudio, específicamente en sitios donde *P. patula* o *A. religiosa* dominen en área basal. Esta herramienta biométrica será útil en la toma de decisiones en el manejo forestal, para determinar la intensidad y el tiempo de aplicación de los aclareos de acuerdo con el turno definido en el área de estudio.

Agradecimientos

Al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencia y Tecnología (CONAHCYT), hoy Secretaría de Ciencia, Humanidades, Tecnología e Innovación (SECIHTI), por financiar al primer autor para cursar sus estudios de Doctorado en Ciencias (Apoyo 814397). A los socios de la Reserva Forestal Multifuncional 'El Manantial', Aquixtla, Puebla, por facilitar las bases de datos y acceso a sus bosques. Al Colegio de Postgraduados por las facilidades otorgadas para realizar la investigación.

Declaración de conflicto de intereses

Los autores declaran que no tienen conflictos de intereses económicos ni relaciones personales conocidas que pudieran haber influido en el trabajo presentado en este artículo.

Declaración del uso de inteligencia artificial (IA)

Los autores declaran no haber utilizado IA generativa o tecnologías asistidas por IA para el desarrollo del presente manuscrito.

Fin de la versión en español

- Cieszewski, C. J., & Bailey, R. L. (2000). Generalized algebraic difference approach: Theory based derivation of dynamic site equations with polymorphism and variable asymptotes. *Forest Science*, 46(1), 116-126. <https://doi.org/10.1093/forestscience/46.1.116>
- Cieszewski, C. J., Harrison, M., & Martin, S. W. (2000). *Practical methods for estimating non-biased parameters in self-referencing growth and yield models*. <https://citeseerx.ist.psu.edu/document?repid=rep1&type=pdf&doi=11e8bde4a3109639725605a2f090e2e03772e82d>

- Cieszewski, C. J., & Strub, M. (2018). Comparing properties of self-referencing models based on nonlinear-fixed-effects versus nonlinear-mixed-effects modeling approaches. *Mathematical and Computational Forestry & Natural Resource Sciences*, 10(2), 46-57. <https://www.mcfns.com/index.php/Journal/article/view/10.11/2018.11>
- Dais, G., Kitikidou, K., & Milios, E. (2023). Site index curves for *Abies borisii-regis* Mattf. and *Fagus sylvatica* L. mixed stands in central Greece. *Sustainability*, 15(13), 1-13. <https://doi.org/10.3390/su151310349>
- Guzmán-Santiago, J. C., Aguirre-Calderón, O. A., Vargas-Larreta, B., Gómez-Cárdenas, M., de los Santos-Posadas, H. M., Quiñonez-Barraza, G., & Marroquín-Morales, P. (2021). Ecuaciones de calidad de sitio para *Abies religiosa* en diferentes regiones de México. *Madera y Bosques*, 27(3), 1-14. <https://doi.org/10.21829/myb.2021.2732232>
- Hipler, S.-M., Spiecker, H., & Wu, S. (2021). Dynamic top height growth models for eight native tree species in a cool-temperate region in northeast China. *Forests*, 12(8), 1-15. <https://doi.org/10.3390/f12080965>
- Kahriman, A., Sönmez, T., & von Gadow, K. (2018). Site index models for calibrian pine in the central mediterranean region of Turkey. *Journal of Sustainable Forestry*, 37(5), 459-474. <https://doi.org/10.1080/10549811.2017.1421086>
- Koirala, A., Montes, C. R., & Bullock, B. P. (2021). Modeling dominant height using stand and water balance variables for loblolly pine in the Western Gulf, US. *Forest Ecology and Management*, 479, 118610. <https://doi.org/10.1016/j.foreco.2020.118610>
- Nava-Nava, A., Santiago-García, W., Quiñonez-Barraza, G., de los Santos-Posadas, H. M., Valdez-Lazalde, J. R., & Ángeles-Pérez, G. (2022). Climatic and topographic variables improve estimation accuracy of patula pine forest site productivity in southern Mexico. *Forests*, 13(8), 1-15. <https://doi.org/10.3390/f13081277>
- Ni, C., & Zhang, L. (2007). An analysis and comparison of estimation methods for self-referencing equations. *Canadian Journal of Forest Research*, 37(8), 1472-1484. <https://doi.org/10.1139/X06-285>
- Nigh, G. (2015). Engelmann spruce site index models: A comparison of model functions and parameterizations. *PLoS ONE*, 10(4), e0124079. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0124079>
- Nord-Larsen, T. (2006). Developing dynamic site index curves for European Beech (*Fagus sylvatica* L.) in Denmark. *Forest Science*, 52(2), 173-181. <https://doi.org/10.1093/forestscience/52.2.173>
- Orrego, S., Montes, C., Restrepo, H. I., Bullock, B. P., & Zapata, M. (2021). Modeling height growth for teak plantations in Colombia using the reducible stochastic differential equation approach. *Journal of Forestry Research*, 32(3), 1035-1045. <https://doi.org/10.1007/s11676-020-01174-y>
- Özçelik, R., Cao, Q. V., Gómez-García, E., Crecente-Campo, F., & Eler, Ü. (2019). Modeling dominant height growth of cedar (*Cedrus libani* A. Rich) stands in Turkey. *Forest Science*, 65(6), 725-733. <https://doi.org/10.1093/forsci/fxz038>
- Pinheiro, J., Bates, D., & R Core Team. (2023). *nlme: Linear and nonlinear mixed effects models*. R Foundation for Statistical Computing. <https://CRAN.R-project.org/package=nlme>
- Poudel, K. P., & Cao, Q. V. (2013). Evaluation of methods to predict weibull parameters for characterizing diameter distributions. *Forest Science*, 59(2), 243-252. <https://doi.org/10.5849/forsci.12-001>
- Pyo, J. (2017). Developing the site index equation using a generalized algebraic difference approach for *Pinus densiflora* in central region, Korea. *Forest Science and Technology*, 13(2), 87-91. <https://doi.org/10.1080/21580103.2017.1308889>
- Quiñonez-Barraza, G., de los Santos-Posadas, H., Manuel, Cruz-Cobos, F., Velázquez-Martínez, A., Ángeles-Pérez, G., & Ramírez-Valverde, G. (2015). Índice de sitio con polimorfismo complejo para masas forestales de Durango, México. *Agrociencia*, 49(4), 439-454. <https://agrociencia-colpos.org/index.php/agrociencia/article/view/1157/1157>
- R Development Core Team. (2024). *R: A language and environment for statistical computing*. R Foundation for Statistical Computing. <https://www.R-project.org/>
- Salas-Eljatib, C. (2020). Height growth-rate at a given height: A mathematical perspective for forest productivity. *Ecological Modelling*, 431, 109198. <https://doi.org/10.1016/j.ecolmodel.2020.109198>
- Santiago-García, W., de los Santos-Posadas, H. M., Ángeles-Pérez, G., Valdez-Lazalde, J. R., Corral-Rivas, J. J., Rodríguez-Ortiz, G., & Santiago-García, E. (2015). Modelos de crecimiento y rendimiento de totalidad del rodal para *Pinus patula*. *Madera y Bosques*, 21(3), 95-110. <https://doi.org/10.21829/myb.2015.213459>
- Seki, M., & Sakici, O. E. (2017). Dominant height growth and dynamic site index models for Crimean pine in the Kastamonu-Taşköprü region of Turkey. *Canadian Journal of Forest Research*, 47(11), 1441-1449. <https://doi.org/10.1139/cjfr-2017-0131>
- Socha, J., Tymiąńska-Czabańska, L., Bronisz, K., Zięba, S., & Hawryło, P. (2021). Regional height growth models for Scots pine in Poland. *Scientific Reports*, 11(1), 10330. <https://doi.org/10.1038/s41598-021-89826-9>
- Sprengel, L., Spiecker, H., & Wu, S. (2022). Two subject specific modelling approaches to construct base-age invariant polymorphic site index curves with varying asymptotes. *Silva Fennica*, 56(1), 1-18. <https://doi.org/10.14214/sf.10544>
- Tarmu, T., Laarmann, D., & Kiviste, A. (2020). Mean height or dominant height – what to prefer for modelling the site index of Estonian forests? *Forestry Studies*, 72(1), 121-138. <https://doi.org/10.2478/fsmu-2020-0010>
- Trim, K. R., Coble, D. W., Weng, Y., Stovall, J. P., & Hung, I. K. (2020). A new site index model for intensively managed loblolly pine (*Pinus taeda*) plantations in the West Gulf Coastal Plain. *Forest Science*, 66(1), 2-13. <https://doi.org/10.1093/forsci/fxz050>
- Valdez-Lazalde, J. R., & Lynch, T. B. (2000). Ecuaciones para estimar volumen comercial y total en rodales aclareados de *Pinus patula* en Puebla, México. *Agrociencia*, 34(6), 747-758. <https://agrociencia-colpos.org/index.php/agrociencia/article/view/79/79>
- Vargas-Larreta, B., Corral-Rivas, J. J., Aguirre-Calderón, O. A., López-Martínez, J. O., Santos-Posadas, H. M., Zamudio-Sánchez, F. J., Treviño-Garza, E. J., Martínez-Salvador, M., & Aguirre-Calderón, C. G. (2017). SiBiFor: Sistema Biométrico Forestal

- para el manejo de los bosques de México. *Revista Chapingo Serie Ciencias Forestales y del Ambiente*, 23(3), 437-455. <https://doi.org/10.5154/r.rchscfa.2017.06.040>
- Wang, M., Borders, B. E., & Zhao, D. (2008). An empirical comparison of two subject-specific approaches to dominant heights modeling: The dummy variable method and the mixed model method. *Forest Ecology and Management*, 255(7), 2659-2669. <https://doi.org/10.1016/j.foreco.2008.01.030>
- Wang, M., Montes, C. R., Bullock, B. P., & Zhao, D. (2020). An empirical examination of dominant height projection accuracy using difference equation models. *Forest Science*, 66(3), 267-274. <https://doi.org/10.1093/forsci/fxz079>
- Zeoli, L., De Mil, T., Forler, A., Pau, M., Latte, N., Claessens, H., & Ligot, G. (2025). Modeling productivity of silver birch (*Betula pendula* Roth.) combining phytocentric and geocentric approaches in Northwestern Europe. *Forest Ecology and Management*, 578, 122473. <https://doi.org/10.1016/j.foreco.2024.122473>