



Updated dominant height growth models for three pine species in UMAFOR 2108 in northern Puebla

Actualización de modelos de crecimiento en altura dominante de tres especies de pino en la UMAFOR 2108 en el norte de Puebla

Diego A. Gómez-Reyes¹; Héctor M. De los Santos-Posadas^{1*};
Arnulfo Aldrete¹; Juan de D. Benavides Solorio²

¹Colegio de Postgraduados (COLPOS), Campus Montecillo. Carretera México-Texcoco km 36.5, Montecillo. C. P. 56230. Texcoco de Mora, Estado de México, México.

²Instituto Nacional de Investigaciones Forestales, Agrícolas y Pecuarias (INIFAP), Campo Experimental Centro-Altos de Jalisco. Interior parque los Colomos s/n, col. Providencia. C. P. 44660. Guadalajara, Jalisco, México.

*Corresponding author: hmsantos@colpos.mx

Abstract

Introduction. The Forest Biometric System for forest management in Mexico (SiBiFor) proposes dominant height growth equations that use the Korf function under the Generalized Algebraic Difference Approach (GADA); however, it has been identified that some functions do not meet the required properties (transitivity) of GADA.

Objective. To update the site index models proposed by SiBiFor for the species *Pinus patula* Schiede ex Schltdl. & Cham., *Pinus ayacahuite* Ehren ex Schltdl. and *Pinus teocote* Schiede ex Schltdl. & Cham. corresponding to UMAFOR 2108.

Materials and methods. To ensure an objective evaluation, the original stem analysis data from 64 dominant trees collected by SiBiFor for the UMAFOR in 2016 were used. To model dominant height growth and generate the site index curve families, the base Korf model was applied using the GADA approach. These corrections are analyzed and documented in detail, as some studies were found to incorrectly apply the solution derived from the GADA approach in the Korf model.

Results. The corrected equations for the three pine species showed satisfactory parameter estimates, satisfied the properties of the GADA approach, were invariant to the reference age, and allowed the estimation of dominant height and site quality at any height and base age.

Conclusions. The proposed update and fitting of the corrected models improve their accuracy for classifying productivity and timber yield of the species with greater reliability.

Keywords: *Pinus patula*, *Pinus ayacahuite*, *Pinus teocote*, Generalized Algebraic Difference Approach, Korf model.

Resumen

Introducción. El Sistema Biométrico Forestal para el manejo de los bosques en México (SiBiFor) propone ecuaciones de crecimiento en altura dominante que utilizan la función de Korf mediante el enfoque de diferencia algebraica generalizada (DAG); sin embargo, se detectó que algunas funciones no cumplen con las propiedades necesarias (transitividad) del enfoque de DAG.

Objetivo. Actualizar los modelos de índice de sitio propuestos por SiBiFor para las especies *Pinus patula* Schiede ex Schltdl. & Cham., *Pinus ayacahuite* Ehren ex Schltdl. y *Pinus teocote* Schiede ex Schltdl. & Cham. correspondientes a la UMAFOR 2108.

Materiales y métodos. Para lograr una evaluación objetiva se utilizaron los datos originales de análisis troncales de 64 árboles dominantes, recabados por SiBiFor para la UMAFOR en el año 2016. Para modelar el crecimiento en altura dominante y generar las familias de curvas de índice de sitio se empleó el modelo base de Korf con el enfoque de DAG. Se analizan y documentan estas correcciones con detalle, dado que se encontraron algunos estudios que usan incorrectamente las soluciones del proceso DAG en el modelo Korf.

Resultados. Las ecuaciones corregidas para las tres especies de pino obtuvieron parámetros satisfactorios de ajuste, cumplen con las propiedades de la metodología de DAG, son invariantes a la edad de referencia y permiten estimar la altura dominante y la calidad de estación a cualquier altura y edad base.

Conclusiones. La propuesta de actualización y ajuste de los modelos corregidos mejora su precisión para la clasificación de la productividad y la producción maderable de las especies con mayor confiabilidad.

Palabras clave: *Pinus patula*, *Pinus ayacahuite*, *Pinus teocote*, diferencia algebraica generalizada, modelo Korf.

Please cite this article as follows (APA 7): Gómez-Reyes, D. A., De los Santos-Posadas, H. M., Aldrete, A., & Benavides Solorio, J. D. (2026). Updated dominant height growth models for three pine species in UMAFOR 2108 in northern Puebla. *Revista Chapingo Serie Ciencias Forestales y del Ambiente*, 32, e25017. <https://doi.org/10.5154/r.rchscfa.2025.04.017>



Introduction

The Forest Management Unit (UMAFOR) 2108, located in northern Puebla represents the most important area for silviculture and forest management in the state. Pine forest vegetation predominates, with prominent species including *Pinus ayacahuite* Ehren ex Schltldl, *Pinus patula* Schiede ex Schltldl. & Cham., *Pinus pseudostrabus* Lindl, *Pinus teocote* Schiede ex Schltldl. & Cham, *Pinus montezumae* Lamb. and *Pinus leiophylla* Schltldl. & Cham. To manage large amounts of timber volume and growth data for these species, it is necessary to have reliable silvicultural tools that support the rational and sustainable management of forests (Tamarit-Urías et al., 2022). Dominant height growth and site index (SI) models are valuable tools for estimating the potential productivity of stands, which in turn influence the determination of rotation age, final harvest, and intermediate silvicultural treatments (Lima dos Santos et al., 2023; Nava-Nava et al., 2020; Palacios-Cruz et al., 2020; Tamarit-Urías et al., 2021).

One proposal that has generated many growth models is the Forest Biometric System for forest management in Mexico (SiBiFor). This system includes more than 7000 mathematical models, among which dominant height growth and SI models for commercially important conifers in the country stand out (Vargas-Larreta et al., 2017). In the specific case of UMAFOR 2108, SiBiFor proposed a set of site index (SI) equations that used the Korf model for the most important species (Lundqvist, 1957), applying the generalized algebraic difference approach (GADA). The GADA approach was developed in 2000 by C. J. Cieszewski and R. L. Bailey and has been widely used for the construction of SI models, as it generates families of curves with asymptotic polymorphism (Beteta-Montaña et al., 2022; Collazos-Avendaño et al., 2024; González-Méndez et al., 2017; Hernández-Ramos et al., 2022). This methodology has two fundamental properties: base-age invariance (transitivity) and projection interval invariance (Bailey & Clutter, 1974; Cieszewski & Bailey, 2000).

Following an analysis of model parameters and an evaluation of tree measurement characteristics from forest stands within UMAFOR 2108, the reported SiBiFor functions were found not to satisfy the properties of the GADA approach (base-age invariance). Discrepancies were also identified, including underestimation in both the patterns of SI curve families and the predictions of dominant heights. Therefore, a detailed review and mathematical updating of all SI models reported for UMAFOR 2108 were proposed. This review is essential for the proper use of the models, accurate estimation of dominant heights, and consequently, for a reliable assessment of potential productivity and timber yield, thereby contributing to the sustainability of forest ecosystems. In this context, the objective of the present

Introducción

La Unidad de Manejo Forestal (UMAFOR) 2108, ubicada en el norte de Puebla, representa la zona de silvicultura y manejo forestal más importante del estado. En esta predomina la vegetación de bosque de pino y destacan las especies *Pinus ayacahuite* Ehren ex Schltldl, *Pinus patula* Schiede ex Schltldl. & Cham., *Pinus pseudostrabus* Lindl, *Pinus teocote* Schiede ex Schltldl. & Cham, *Pinus montezumae* Lamb. y *Pinus leiophylla* Schltldl. & Cham. Para manejar cantidades grandes de datos de volumen maderable y crecimiento de las especies mencionadas, es necesario contar con herramientas silvícolas confiables que ayuden al manejo racional y sostenible de los bosques (Tamarit-Urías et al., 2022). Los modelos de crecimiento en altura dominante e índice de sitio (IS) constituyen una herramienta valiosa para estimar la productividad potencial de los rodales que, a su vez, influyen para determinar el turno técnico, la cosecha final y los tratamientos silvícolas intermedios (Lima dos Santos et al., 2023; Nava-Nava et al., 2020; Palacios-Cruz et al., 2020; Tamarit-Urías et al., 2021).

Una propuesta que generó gran número de modelos de crecimiento es el Sistema Biométrico Forestal para el manejo de los bosques en México (SiBiFor). Este sistema cuenta con más de 7000 modelos matemáticos, entre los que destacan modelos de crecimiento en altura dominante e IS de coníferas de interés comercial para el país (Vargas-Larreta et al., 2017). En el caso específico de la UMAFOR 2108, el SiBiFor propuso una serie de ecuaciones de IS que emplearon el modelo de Korf para las especies más importantes (Lundqvist, 1957), mediante el enfoque de diferencia algebraica generalizada (DAG). La metodología DAG se creó en el año 2000 por C. J. Cieszewski y R. L. Bailey y se ha utilizado ampliamente para la construcción de modelos de IS, ya que genera familias de curvas con polimorfismo asintótico (Beteta-Montaña et al., 2022; Collazos-Avendaño et al., 2024; González-Méndez et al., 2017; Hernández-Ramos et al., 2022). Esta metodología cuenta con dos propiedades fundamentales: invarianza (transitividad) de la edad base e intervalo de proyección (Bailey & Clutter, 1974; Cieszewski & Bailey, 2000).

Después de un análisis de los parámetros de los modelos y una evaluación de datos dasométricos provenientes de predios forestales de la UMAFOR 2108, se detectó que las funciones SiBiFor reportadas no cumplían con las propiedades del enfoque en DAG (transitividad de la edad base). También se encontraron discrepancias de subestimación tanto en los patrones de las familias de IS como en las predicciones de las alturas dominantes. Por lo anterior, se planteó una revisión detallada y la actualización matemática de todos los modelos de IS reportados para la UMAFOR 2108. Dicha revisión es fundamental para el uso correcto de los modelos, la estimación precisa de las alturas dominantes y, por

study was to update the site index models proposed by SiBiFor for the species *P. patula*, *P. ayacahuite* and *P. teocote* corresponding to UMAFOR 2108 in the Sierra Norte de Puebla region.

Materials and methods

Study area

The study area is located in the Sierra Norte de Puebla region in UMAFOR 2108 Chignahuapan-Zacatlán, the most important forest production zone in the state, between the coordinates 20° 07' 06" to 19° 44' 18" N and 97° 57' 18" to 97° 38' 42" W. The predominant climates are C (W₁) (W), temperate subhumid with summer rains of medium humidity; C (m), temperate subhumid with abundant summer rains; and C (W₂), temperate subhumid with summer rains (Ceballos-Pérez, 2020). Of the nine vegetation types identified in the UMAFOR, one corresponds to pine forest distributed above 2500 m in elevation, and two others consist of pine-oak mixtures. The dominant species in the upper canopy are *Pinus patula*, *P. pseudostrobus*, *P. ayacahuite* and *P. teocote* (López-Becerra & Barrón-Sevilla, 2018).

Data base

Objective comparisons were based on the original SiBiFor database for UMAFOR 2108 (2016). Age-height data came from stem analyses of 64 dominant trees from three species: 20 *P. patula*, 20 *P. teocote* and 24 *P. ayacahuite*. The corresponding growth series are present in Figure 1.

Model used

To model dominant height growth and generate SI curve families, the base Korf equation (Lundqvist, 1957; Eq. 1) was applied using the GADA approach. This model is highly flexible because it can be accurately fitted to a variety of growth patterns and datasets without losing biological consistency. Among its key properties are the presence of an inflection point and a horizontal asymptote, which are desirable characteristics in growth models.

Generalized Algebraic Difference Approach

The GADA approach enables the derivation of dynamic, *ad hoc* equations based on a base growth model while ensuring compliance with the properties of models derived through algebraic difference: invariance (transitivity) with respect to base age and projection interval (Barrio-Anta et al., 2006). This technique allows more than one parameter of the base model to depend on unobserved and difficult-to-measure site conditions (e.g., soil types, climatic factors, and management

consecuente, para una evaluación confiable de la productividad potencial y de la producción maderable, contribuyendo así a la sostenibilidad de los ecosistemas forestales. En tal contexto, el objetivo del presente estudio fue actualizar los modelos de índice de sitio propuestos por el SiBiFor para las especies *P. patula*, *P. ayacahuite* y *P. teocote* correspondientes a la UMAFOR 2108 en la región Sierra Norte de Puebla.

Materiales y métodos

Área de estudio

El área de estudio se ubica en la región Sierra Norte de Puebla en la UMAFOR 2108 Chignahuapan-Zacatlán, zona de producción forestal más importante del estado, entre las coordenadas geográficas 20° 07' 06" a 19° 44' 18" N y 97° 57' 18" a 97° 38' 42" O. Los climas predominantes son: C (W₁) (W) templado subhúmedo con lluvias en verano de humedad media, C (m) templado subhúmedo con lluvias abundantes en verano y C (W₂) templado subhúmedo con lluvias en verano (Ceballos-Pérez, 2020). De los nueve tipos de vegetación que se identificaron en la UMAFOR, una corresponde a bosque de pino que se distribuye por encima de los 2500 m de elevación y dos más son mezclas de pino y encino. Las especies dominantes en el estrato superior son *Pinus patula*, *P. pseudostrobus*, *P. ayacahuite* y *P. teocote* (López-Becerra & Barrón-Sevilla, 2018).

Base de datos

Con el fin de lograr comparaciones objetivas se utilizó la base de datos original que el SiBiFor recolectó para la UMAFOR 2108 en 2016. Los datos de edad-altura provienen de análisis troncales de 64 árboles dominantes de tres especies: 20 corresponden a *P. patula*, 20 de *P. teocote* y 24 de *P. ayacahuite*. Las series de crecimiento de estos datos se presentan en la Figura 1.

Modelo utilizado

Para modelar el crecimiento en altura dominante y generar las familias de curvas de IS se empleó la ecuación base de Korf (Lundqvist, 1957; Ec. 1) con el enfoque de DAG. Este modelo es muy flexible debido a que puede ajustarse con precisión a varios patrones de crecimiento y conjuntos de datos, sin perder coherencia biológica. Entre sus propiedades destacan la presencia de un punto de inflexión y asíntota horizontal que son características deseables en modelos de crecimiento.

Enfoque de diferencia algebraica generalizada

La metodología DAG permite la obtención de ecuaciones dinámicas *ad hoc* en función de un modelo base de crecimiento y el cumplimiento de las propiedades de modelos derivados por diferencia algebraica:

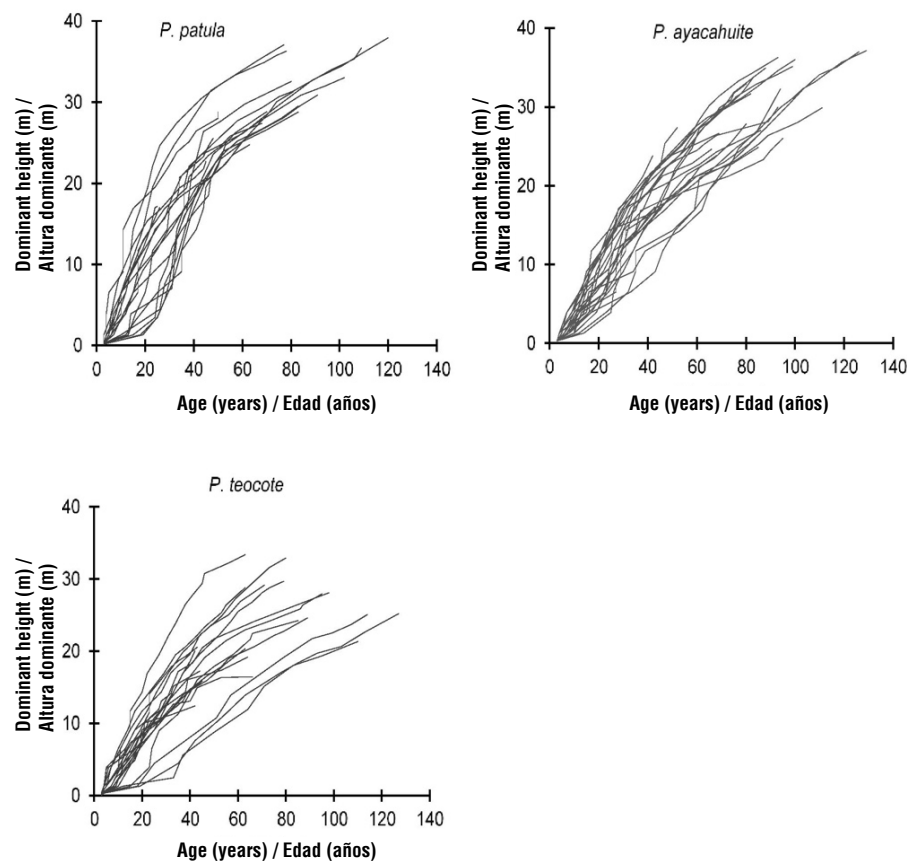


Figure 1. Dominant height growth patterns of three pine species in the Forest Management Unit 2018 Chignahuapan-Zacatlán, Puebla.

Figura 1. Patrón de crecimiento de alturas dominantes de tres especies de pino en la Unidad de Manejo Forestal 2108 Chignahuapan-Zacatlán, Puebla.

regimes). This results in polymorphic curve families with multiple asymptotes, providing greater capacity to accurately fit a variety of datasets (Cieszewski & Bailey, 2000).

The steps of the GADA methodology are described below using Equation 1 (Eq.1), which is the primary focus of this study. For further details on this methodology, see Cieszewski and Bailey (2000).

A key aspect of this methodology is the formulation of multiple growth hypotheses (step 2' in each solution presented below), defined as the function that describes the relationship between the parameter χ and the parameters of the base model. These hypotheses enable the generation of alternative dynamic solutions (S1, S2 y S3), each with specific properties for growth projection. Practical experience has shown that assigning simple functions to " χ ", for example, an inverse linear function ($\beta_1 + \beta_2 \chi$) or inverse ratio functions [$(\beta_1 + \beta_2 / \chi)$, $\beta_1 / (\chi + \beta_2)$] is enough to produce highly robust models (Krumland & Eng, 2005).

invarianza (transitividad) a la edad base y al intervalo de proyección (Barrio-Anta et al., 2006). Esta técnica posibilita que más de un parámetro del modelo base dependa de las condiciones del sitio no observables y de difícil medición (tipos de suelo, factores climáticos y regímenes de manejo). Con esto se obtienen familias de curvas polimórficas con múltiples asíntotas de mayor capacidad para ajustarse con precisión a varios conjuntos de datos (Cieszewski & Bailey, 2000).

Los pasos de la metodología DAG se describen a continuación empleando la ecuación 1 (Ec. 1), la cual es objeto principal de este trabajo. Para más detalles de esta metodología consultar Cieszewski y Bailey (2000).

Un aspecto importante en esta metodología es la formulación de varias hipótesis de crecimiento ('paso 2' de cada solución mostrada abajo), entendidas como las funciones que definen la relación del parámetro χ con los parámetros del modelo base. Estas hipótesis permiten generar soluciones dinámicas alternativas (S1, S2 y S3), cada una con propiedades específicas en

Solution 1 (S1)

Step 1. Selection of a base growth model, corresponding to the Korf equation (Lundqvist, 1957):

$$A = \alpha_1 \exp(-\alpha_2 E^{-\alpha_3}) \quad (\text{Eq. 1})$$

where,

A = dominant height (m)

E = age (years)

α_1 , α_2 y α_3 = model parameters

exp = exponential function.

Step 2. Site productivity-dependent parameters are identified and expressed as function of the variable χ , thereby defining new global parameters represented by ' χ ' and ' β ' (growth hypotheses): $\alpha_1 = \exp(\chi)$, $\alpha_2 = (\beta_1 + \frac{\beta_2}{\chi})$ and $\alpha_3 = \beta_3$.

Step 3. Substitution of the parameters into the base equation; subsequently, it is expressed in two states to obtain two three-dimensional dynamic equations:

$$A_1 = \exp(\chi) \exp\left(-\left(\beta_1 + \frac{\beta_2}{\chi}\right) E_1^{-\beta_3}\right) \quad (\text{Eq. 2})$$

$$A_2 = \exp(\chi) \exp\left(-\left(\beta_1 + \frac{\beta_2}{\chi}\right) E_2^{-\beta_3}\right) \quad (\text{Eq. 3})$$

Step 4. Solving Eq. 2 for χ (the parameter defining the growth hypothesis) based on the laws of exponents and logarithms properties:

$$A_1 = \exp\left(\chi - \left(\beta_1 + \frac{\beta_2}{\chi}\right) E_1^{-\beta_3}\right)$$

$$\ln(A_1) = \ln\left(\exp\left(\chi - \left(\beta_1 + \frac{\beta_2}{\chi}\right) E_1^{-\beta_3}\right)\right)$$

$$\ln(A_1) = \chi - \left(\beta_1 + \frac{\beta_2}{\chi}\right) E_1^{-\beta_3}$$

It simplifies to:

$$\ln(A_1) = \chi - \frac{\beta_1 \chi + \beta_2}{\chi E_1^{\beta_3}}$$

The equation is multiplied by $\chi E_1^{\beta_3}$ and then written as $E_1^{\beta_3} \chi^2 - [\beta_1 + \ln(A_1) E_1^{\beta_3}] \chi - \beta_2 = 0$. Solving for χ using the quadratic formula $ax^2 + bx + c = 0$.

$$a = E_1^{\beta_3},$$

$$b = -\beta_1 - \ln(A_1) E_1^{\beta_3}$$

$$c = -\beta_2$$

Solution for χ :

$$\chi = \frac{\beta_1 + E_1^{\beta_3} \ln(A_1) + \sqrt{(-\beta_1 - E_1^{\beta_3} \ln(A_1))^2 + 4\beta_2 E_1^{\beta_3}}}{2E_1^{\beta_3}} \quad (\text{Eq. 4})$$

la proyección del crecimiento. La experiencia práctica ha demostrado que asignar a " χ " funciones simples; por ejemplo, una función lineal inversa ($\beta_1 + \beta_2 \chi$) o de razón inversa $[(\beta_1 + \beta_2 / \chi), \beta_1 / (\chi + \beta_2)]$ es suficiente para lograr modelos altamente robustos (Krumland & Eng, 2005).

Solución 1 (S1)

Paso 1. Selección de un modelo de crecimiento base, el cual corresponde a la ecuación de Korf (Lundqvist, 1957):

$$A = \alpha_1 \exp(-\alpha_2 E^{-\alpha_3}) \quad (\text{Ec. 1})$$

donde,

A = altura dominante (m),

E = edad (años)

α_1 , α_2 y α_3 = parámetros del modelo

exp = función exponencial.

Paso 2. Se identifican los parámetros dependientes de la productividad del sitio y se expresan como funciones de la variable χ , de tal forma que se crean nuevos parámetros globales representados con la variable ' χ ' y ' β ' (hipótesis de crecimiento): $\alpha_1 = \exp(\chi)$, $\alpha_2 = (\beta_1 + \frac{\beta_2}{\chi})$ y $\alpha_3 = \beta_3$.

Paso 3. Sustitución de los parámetros en la ecuación base; posteriormente, se expresa en dos estados, de modo que se obtengan dos ecuaciones dinámicas tridimensionales:

$$A_1 = \exp(\chi) \exp\left(-\left(\beta_1 + \frac{\beta_2}{\chi}\right) E_1^{-\beta_3}\right) \quad (\text{Ec. 2})$$

$$A_2 = \exp(\chi) \exp\left(-\left(\beta_1 + \frac{\beta_2}{\chi}\right) E_2^{-\beta_3}\right) \quad (\text{Ec. 3})$$

Paso 4. Despeje de χ de la Ec. 2 (parámetro que define la hipótesis de crecimiento) con base en las leyes de los exponentes y propiedades de los logaritmos::

$$A_1 = \exp\left(\chi - \left(\beta_1 + \frac{\beta_2}{\chi}\right) E_1^{-\beta_3}\right)$$

$$\ln(A_1) = \ln\left(\exp\left(\chi - \left(\beta_1 + \frac{\beta_2}{\chi}\right) E_1^{-\beta_3}\right)\right)$$

$$\ln(A_1) = \chi - \left(\beta_1 + \frac{\beta_2}{\chi}\right) E_1^{-\beta_3}$$

Se simplifica:

$$\ln(A_1) = \chi - \frac{\beta_1 \chi + \beta_2}{\chi E_1^{\beta_3}}$$

Se multiplica toda la función por $\chi E_1^{\beta_3}$ y se escribe entonces como $E_1^{\beta_3} \chi^2 - [\beta_1 + \ln(A_1) E_1^{\beta_3}] \chi - \beta_2 = 0$. Se resuelve para χ con la fórmula general $ax^2 + bx + c = 0$.

$$a = E_1^{\beta_3},$$

$$b = -\beta_1 - \ln(A_1) E_1^{\beta_3}$$

$$c = -\beta_2$$

Solution 2 (S2)

Step 2

$$\alpha_1 = \exp(\chi); \alpha_2 = \exp(\beta_1 + \beta_1\chi); \alpha_3 = \beta_3$$

Step 3

$$A_1 = \exp(\chi) \exp(-(\beta_1 + \beta_2\chi)E_1^{-\beta_3}) \quad (\text{Eq. 5})$$

$$A_2 = \exp(\chi) \exp(-(\beta_1 + \beta_2\chi)E_2^{-\beta_3}) \quad (\text{Eq. 6})$$

Step 4. χ is solved based on the laws of exponents and the properties of logarithms, starting from Eq. 5:

$$A_1 = \exp(\chi - (\beta_1 + \beta_2\chi)E_1^{-\beta_3})$$

$$\ln(A_1) = \ln(\exp(\chi - (\beta_1 + \beta_2\chi)E_1^{-\beta_3}))$$

$$\ln(A_1) = \chi - (\beta_1 + \beta_2\chi)E_1^{-\beta_3}$$

It factors as:

$$\chi(1 - \beta_2 E_1^{-\beta_3}) = \ln(A_1) + \beta_1 E_1^{-\beta_3}$$

Solution for χ :

$$\chi = \frac{\ln(A_1) + \frac{\beta_1}{E_1^{\beta_3}}}{\left(1 - \frac{\beta_2}{E_1^{\beta_3}}\right)} \quad (\text{Eq. 7})$$

Solution 3 (S3)

Step 2

$$\alpha_1 = \exp(\chi); \alpha_2 = (\beta_1 + \beta_2)/\chi; \alpha_3 = \beta_3$$

Step 3

$$A_1 = \exp(\chi) \exp\left(-\left(\frac{\beta_1 + \beta_2}{\chi}\right) / E_1^{\beta_3}\right) \quad (\text{Eq. 8})$$

$$A_2 = \exp(\chi) \exp\left(-\left(\frac{\beta_1 + \beta_2}{\chi}\right) / E_2^{\beta_3}\right) \quad (\text{Eq. 9})$$

Step 4. χ is derived from Eq. 8 by applying the laws of exponents and the properties of logarithms:

$$\ln(A_1) = \ln \exp\left(\chi - \left(\frac{\beta_1 + \beta_2}{\chi}\right) / E_1^{\beta_3}\right)$$

$$\ln(A_1) = \chi - \frac{(\beta_1 + \beta_2) / \chi}{E_1^{\beta_3}}$$

The entire expression is multiplied by χ and $[\ln(A_1)\chi = \chi^2 - \frac{(\beta_1 + \beta_2)}{E_1^{\beta_3}}]$ is simplified, then set equal to 0 $[\chi^2 - \ln(A_1)\chi - \frac{(\beta_1 + \beta_2)}{E_1^{\beta_3}} = 0]$ and solved using the quadratic formula by identifying the coefficients a, b and c: a = 1, b = $-\ln(A_1)$, c = $-\frac{(\beta_1 + \beta_2)}{E_1^{\beta_3}}$.

Resultado solución χ :

$$\chi = \frac{\beta_1 + E_1^{\beta_3} \ln(A_1) + \sqrt{(-\beta_1 - E_1^{\beta_3} \ln(A_1))^2 + 4\beta_2 E_1^{\beta_3}}}{2E_1^{\beta_3}} \quad (\text{Ec. 4})$$

Solución 2 (S2)

Paso 2

$$\alpha_1 = \exp(\chi); \alpha_2 = \exp(\beta_1 + \beta_1\chi); \alpha_3 = \beta_3$$

Paso 3

$$A_1 = \exp(\chi) \exp(-(\beta_1 + \beta_2\chi)E_1^{-\beta_3}) \quad (\text{Ec. 5})$$

$$A_2 = \exp(\chi) \exp(-(\beta_1 + \beta_2\chi)E_2^{-\beta_3}) \quad (\text{Ec. 6})$$

Paso 4. Se resuelve χ con base en las leyes de los exponentes y propiedades de los logaritmos, a partir de la Ec. 5:

$$A_1 = \exp(\chi - (\beta_1 + \beta_2\chi)E_1^{-\beta_3})$$

$$\ln(A_1) = \ln(\exp(\chi - (\beta_1 + \beta_2\chi)E_1^{-\beta_3}))$$

$$\ln(A_1) = \chi - (\beta_1 + \beta_2\chi)E_1^{-\beta_3}$$

Se factoriza como:

$$\chi(1 - \beta_2 E_1^{-\beta_3}) = \ln(A_1) + \beta_1 E_1^{-\beta_3}$$

Resultado solución χ :

$$\chi = \frac{\ln(A_1) + \frac{\beta_1}{E_1^{\beta_3}}}{\left(1 - \frac{\beta_2}{E_1^{\beta_3}}\right)} \quad (\text{Ec. 7})$$

Solución 3 (S3)

Paso 2

$$\alpha_1 = \exp(\chi); \alpha_2 = (\beta_1 + \beta_2)/\chi; \alpha_3 = \beta_3$$

Paso 3

$$A_1 = \exp(\chi) \exp\left(-\left(\frac{\beta_1 + \beta_2}{\chi}\right) / E_1^{\beta_3}\right) \quad (\text{Ec. 8})$$

$$A_2 = \exp(\chi) \exp\left(-\left(\frac{\beta_1 + \beta_2}{\chi}\right) / E_2^{\beta_3}\right) \quad (\text{Ec. 9})$$

Paso 4. Se resuelve χ con base en las leyes de los exponentes y propiedades de los logaritmos, a partir de la Ec. 8:

$$\ln(A_1) = \ln \exp\left(\chi - \left(\frac{\beta_1 + \beta_2}{\chi}\right) / E_1^{\beta_3}\right)$$

Solution for χ :

$$\chi = \frac{\ln(A_1) + \sqrt{4 \frac{(\beta_1 + \beta_2)}{E_1^{\beta_3}} + \ln(A_1)^2}}{2} \quad (\text{Eq. 10})$$

where,

A_i = dominant height at the i -th state (m)

E_i = age at the i -th state (years)

α_1, α_2 y α_3 = parameters of the base model

β_1, β_2 y β_3 = global parameters of the dynamic equation

χ = unobservable independent variable describing site productivity.

Castillo-López et al. (2013) fitted this family of curves to four pine species in Durango; however, they used an unnecessarily complex expression for the solution of χ . Finally, when comparing growth patterns, the fit performed by SiBiFor involves Eq. 9 of S3, but they show the solution for χ corresponding to S1. (Eq. 4), which results in an error. Nevertheless, the model exhibits acceptable goodness-of-fit statistics; however, it does not satisfy the mathematical properties of the GADA approach. This same pattern is observed in the study presented by Galindo-Soto et al. (2017, p. 27).

Parameter estimation

Model parameters were estimated using an iterative method, which is a base-age invariant approach implemented through the MODEL procedure of the SAS/ETS statistical package (SAS Institute Inc., 2020). This is an efficient technique that estimates both global parameters (common to all trees) and local parameters (specific to each tree). In the first step, the global parameters of the dynamic function (β_1, β_2 and β_3) were estimated by treating the initial condition, or local parameter (\hat{A}_1), as a constant, corresponding to the observed SI for each tree. In the second step, the estimated global parameters were treated as constants, and the observed SI values (local parameters) were used to estimate the SI for each tree. Finally, in the third step, the estimated SI for each tree (local parameters) become the new observed SI values, and the global parameters (β_1, β_2 and β_3) are obtained by refitting the model. This procedure was repeated until the global parameters stabilized (Cieszewski & Bailey, 2000). To correct for autocorrelation, a second-order continuous autoregressive model [CAR (2)] was used. The functional form is as follows:

$$e_{ij} = d_1 \rho_1^{t_{ij}-t_{ij-1}} e_{ij-1} + d_2 \rho_2^{t_{ij}-t_{ij-2}} e_{ij-2} + \varepsilon_{ij} \quad (\text{Eq.11})$$

where,

e_{ij} = i -th residual of the sampling unit at the j -th measurement

e_{ij-1} and e_{ij-2} = residuals corresponding to one and two

$$\ln(A_1) = \chi \cdot \frac{(\beta_1 + \beta_2)}{E_1^{\beta_3}}$$

Se multiplica toda la función por χ y se simplifica [$\ln(A_1)\chi = \chi^2 \cdot \frac{(\beta_1 + \beta_2)}{E_1^{\beta_3}}$], se iguala a 0 [$\chi^2 - \ln(A_1)\chi - \frac{(\beta_1 + \beta_2)}{E_1^{\beta_3}} = 0$] y se resuelve con la fórmula general identificando a, b y c: a = 1, b = $-\ln(A_1)$, c = $-\frac{(\beta_1 + \beta_2)}{E_1^{\beta_3}}$.

Resultado solución χ :

$$\chi = \frac{\ln(A_1) + \sqrt{4 \frac{(\beta_1 + \beta_2)}{E_1^{\beta_3}} + \ln(A_1)^2}}{2} \quad (\text{Ec. 10})$$

donde,

A_i = altura dominante en el i -ésimo estado (m)

E_i = edad en el i -ésimo estado (años)

α_1, α_2 y α_3 = parámetros del modelo base

β_1, β_2 y β_3 = parámetros globales de la ecuación dinámica

χ = variable independiente no observable que describe la productividad del sitio.

Castillo-López et al. (2013) ajustaron esta familia de curvas a cuatro especies de pinos en Durango, pero utilizan una expresión de la solución χ innecesariamente compleja. Finalmente, se debe mencionar que, al contrastar los patrones de crecimiento, el ajuste realizado por el SiBiFor involucra la Ec. 9 de la S3, pero presentan la solución de χ que corresponde a la S1 (Ec. 4), lo cual repercute en un error. A pesar de ello, el modelo presenta estadísticos de ajuste aceptables, pero no cumple con las propiedades matemáticas de DAG. Este mismo patrón ocurre en el trabajo presentado por Galindo-Soto et al. (2017, pág. 27).

Estimación de parámetros

Los parámetros del modelo se estimaron con el método iterativo, el cual es una metodología invariante a la edad base, mediante el procedimiento MODEL del programa estadístico SAS/ETS (SAS Institute Inc., 2020). Esta es una técnica eficiente que estima parámetros globales (comunes en todos los árboles) y locales (específicos para cada árbol). Como primer paso se estimaron los parámetros globales de la función dinámica (β_1, β_2 y β_3) tomando la condición inicial o parámetro local (\hat{A}_1) como constante, el cual es el IS observado para cada árbol. Como segundo paso se utilizan las estimaciones de los parámetros globales como constantes y los valores observados del IS (parámetros locales), para la estimación del IS de cada árbol. Finalmente, en el tercer paso, el IS estimado para cada árbol (parámetro local) se convierte en el nuevo valor del IS observado y los parámetros globales (β_1, β_2 y β_3) se obtienen al reajustar el modelo. Este procedimiento se repite hasta que los parámetros globales se estabilizan (Cieszewski & Bailey, 2000). Para corregir la autocorrelación se utilizó

previous measurements, respectively, in the same sampling unit

$d_1 = 1$ for $j > 1$ and 0 for $j = 1$

$d_2 = 1$ for $j > 2$ and 0 for $j \leq 2$

ρ_1 and $\rho_2 =$ first- and second-order autoregressive parameters, respectively

$t_{ij} - t_{ij-1} =$ time interval between observation j_{th} and observation j_{th-1} in each stem analysis

$t_{ij} - t_{ij-1} =$ time interval between observation j_{th} and observation j_{th-2} in each stem analysis

$\epsilon_{ij} =$ error term under the assumption of independence.

Model Goodness of Fit

The best models were selected based on both numerical and graphical comparisons. For the numerical evaluation, the following goodness-of-fit statistics were used: root mean square error (RMSE), adjusted coefficient of determination (R^2_{Adj}), site index consistency index (SICI), and fit index. Graphically, the biological realism of the data and the fitted model was assessed by comparing SI families with the observed growth patterns, as well as by analyzing the residual patterns against the predicted values.

Fit Index and Site Index Consistency Index (SICI)

The fit index (FI) and the SICI are two goodness-of-fit statistics proposed to facilitate model selection. The fit index is a metric similar to R^2 . Both statistics measure the proportion of variance explained by the model and range from 0 to 1. Values closer to 1 indicate that a greater proportion of the variance in the dependent variable is explained by the model. The difference between the two lies in how the dependent variable (dominant height) is estimated with the fit index based on the observe SI (the last height-age measurement) for each tree, projected using the fitted model. In contrast, the SICI measures the uniformity of SI estimates for an individual tree. The SICI ranges from 0 to 1, where 1 represents complete homogeneity (i.e., the SI remains constant), and values close to 0 indicate high variability. This index is calculated by estimating the SI for each pair of height-age observations for each tree (derived from stem analysis, which describes how tree height evolves with age). These values are then rounded into 1-meter classes to reflect SI precision. Next, the absolute difference between consecutive SI values for a given tree is measured, and 1 is divided by this difference plus a constant of 1. In summary, the closer the SI values are to each other, the higher the SICI value, indicating greater uniformity in the estimates. Finally, all values are averaged to obtain an overall score. Both expressions are presented as follows:

$$FI = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (A_{ij} - \hat{A}_{ij})^2}{\sum_{i=1}^n (A_{ij} - \bar{A}_i)^2} \quad (\text{Eq.12})$$

un modelo autorregresivo continuo de segundo orden [CAR (2)]. La estructura de la función es la siguiente:

$$e_{ij} = d_1 \rho_1^{t_{ij}-t_{ij-1}} e_{ij-1} + d_2 \rho_2^{t_{ij}-t_{ij-2}} e_{ij-2} + \epsilon_{ij} \quad (\text{Ec.11})$$

donde,

$e_{ij} =$ i -ésimo residuo de la unidad muestral en la j -ésima medición

e_{ij-1} y $e_{ij-2} =$ residuales correspondientes a una y dos mediciones previas, respectivamente, dentro de la misma unidad muestral

$d_1 = 1$ para $j > 1$ y 0 para $j = 1$

$d_2 = 1$ para $j > 2$ y 0 para $j \leq 2$

ρ_1 y $\rho_2 =$ parámetros autorregresivos de orden 1 y 2, respectivamente

$t_{ij} - t_{ij-1} =$ distancia temporal que separa la observación j_{th} de la observación j_{th-1} en cada análisis troncal

$t_{ij} - t_{ij-1} =$ distancia temporal que separa la observación j_{th} de la observación j_{th-2} en cada análisis troncal

$\epsilon_{ij} =$ término del error bajo la condición de independencia.

Bondad de ajuste del modelo

Los mejores modelos se seleccionaron a partir de comparaciones numéricas y gráficas. En el caso numérico se emplearon estadísticos de ajuste: raíz cuadrada media del error (RCME), coeficiente de determinación ajustado (R^2_{Adj}), índice de consistencia de índice de sitio (ICIS) e índice de ajuste. En la parte gráfica se observó el realismo biológico de los datos y el modelo ajustado mediante la comparación de las familias de IS con los patrones de crecimiento observados y el análisis del patrón de los residuales frente a los valores predichos.

Índice de ajuste e índice de consistencia de índice de sitio (ICIS)

El índice de ajuste (IA) y el ICIS son dos estadísticos de bondad de ajuste que se proponen por primera vez para facilitar la selección entre modelos. El índice de ajuste es una métrica similar al R^2 . Ambos miden la proporción de la varianza explicada por el modelo y, de igual manera, toman valores de 0 y 1. Cuanto el valor sea más cercano a 1, más varianza de la variable dependiente se consigue explicar con la ecuación. La diferencia entre uno y otro radica en que la estimación de la variable dependiente (altura dominante) parte del IS real (última medición de altura-edad) para cada árbol, proyectada con base en el modelo obtenido. Por su parte, el ICIS mide la uniformidad de las estimaciones del IS de un árbol. El ICIS varía de 0 a 1, donde 1 representa total homogeneidad (el IS permanece constante) y valores cercanos a 0 indican alta variabilidad. Este índice se calcula estimando el IS para cada par de observaciones de altura-edad de cada árbol (derivadas del análisis troncal que muestran cómo la altura del árbol evoluciona con

$$SICI = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p \frac{(1 + |\hat{I}_{S_k} - \hat{I}_{S_{k-1}}|)}{k} \quad (\text{Eq.13})$$

where,

\hat{I}_{S_k} = estimated site index for k -th height-age observation of the i -th tree

$\hat{I}_{S_{k-1}}$ = estimated site index for a second height-age observation of the same tree

\hat{A}_{ij} = predicted value of the j -th observation for the i -th tree

A_i = observed value of the j -th observation for the i -th tree

\bar{A}_i = mean dominant height of the i -th tree.

Model parameters and Goodness of Fit reported by SiBiFor

Table 1 shows the model parameters reported by SiBiFor, as well as the goodness-of-fit statistics. It is important to note that the standard errors, t -values, and parameter significance levels ($P > |t|$) are not reported on the SiBiFor platform.

Results and Discussion

Parameters and model fitting for *Pinus patula*

Solutions S1 and S2 yielded the best results; S2 achieved the highest SICI (0.63), indicating greater stability in SI predictions (Table 2). The fit obtained with S1 highlights the considerable flexibility of the model when it is properly specified, as demonstrated in this study. González-Méndez et al. (2017) for *P. pseudostrobus*

la edad). Luego, se redondean estos valores en clases de 1 metro para indicar la precisión del IS. Después, se calcula la diferencia absoluta entre los dos valores consecutivos de IS del árbol y se divide 1 entre este resultado, más la constante de 1. En resumen, cuanto más cercanos estén los valores de IS, mayor será el valor del ICIS, lo que señala mayor uniformidad en las estimaciones. Finalmente, se promedian todos los valores para obtener una calificación global. Ambas expresiones se muestran de la siguiente forma:

$$IA = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (A_{ij} - \hat{A}_{ij})^2}{\sum_{i=1}^n (A_{ij} - \bar{A}_i)^2} \quad (\text{Ec.12})$$

$$ICIS = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p \frac{(1 + |\hat{I}_{S_k} - \hat{I}_{S_{k-1}}|)}{k} \quad (\text{Ec.13})$$

donde,

\hat{I}_{S_k} = índice de sitio estimado para la k -ésima observación de altura y edad del i -ésimo árbol

$\hat{I}_{S_{k-1}}$ = índice de sitio estimado para una segunda observación de altura y edad de ese mismo árbol

\hat{A}_{ij} = valores predichos de la j -ésima observación del i -ésimo árbol

A_i = valores observados de la j -ésima observación del i -ésimo árbol

\bar{A}_i = media de altura dominante del i -ésimo árbol.

Parámetros y ajuste de modelo reportado por SiBiFor

El Cuadro 1 muestra los parámetros del modelo reportado por SiBiFor, así como los estadísticos de bondad de ajuste. Cabe destacar que los valores correspondientes al error

Table 1. Model parameters and goodness-of-fit statistics of the Korf model reported by the Forest Biometric System for forest management in Mexico (SiBiFor) for UMAFOR 2108.

Cuadro 1. Parámetros y estadísticos de bondad de ajuste del modelo Korf reportados por el Sistema Biométrico Forestal para el manejo de los bosques en México (SiBiFor) en la UMAFOR 2108.

Model/ Modelo	Species/ Especie	Parameter/ Parámetro	Estimator/ Estimador	SE/ EE	T value/ Valor t	P > t	RMSE/ RCME	R ² _{adj}
Korf SiBiFor	<i>Pinus patula</i>	β_1	-1.4115	*	*	*	1.64	0.98
		β_2	38.1176	*	*	*		
		β_3	0.4354	*	*	*		
Korf SiBiFor	<i>Pinus teocote</i>	β_1	-2.7768	*	*	*	1.09	0.98
		β_2	43.8810	*	*	*		
		β_3	0.3231	*	*	*		
Korf SiBiFor	<i>Pinus ayacahuite</i>	β_1	0.2099	*	*	*	1.30	0.98
		β_2	65.5255	*	*	*		
		β_3	0.1985	*	*	*		

SE: standard error, $P > |t|$: p-value from Student's t-distribution, RMSE: root mean square error, R²_{adj}: adjusted coefficient of determination. *Data not reported in the SiBiFor database.

EE: error estándar, $P > |t|$: valor de la probabilidad de la distribución t de Student, RCME: raíz cuadrada media del error, R²_{adj}: coeficiente de determinación ajustado. *Datos no reportados en la base SiBiFor.

Table 2. Estimated parameters and goodness-of-fit statistics of the Korf model for *Pinus patula* with derived solutions.**Cuadro 2. Parámetros estimados y estadísticos de bondad de ajuste del modelo Korf para *Pinus patula* con las soluciones derivadas.**

Model/solution / Modelo/solución	Parameter/ Parámetro	Estimator/ Estimador	SE/EE	T value/ Valor t	P > t	RMSE/ RCME	R ² _{adj}	SICI/ ICIS	FI/ IA	DW
Korf (S1)	β_1	-9.41E7	1468976	-64.08	<.0001					
	β_2	3.82E8	2.98E-1	1.28E24	<.0001					
	β_3	0.7683	0.0498	15.42	<.0001	1.47	0.98	0.56	0.93	1.83
	ρ_1	0.9606	0.0120	80.13	<.0001					
	ρ_2	0.9104	0.0133	68.70	<.0001					
Korf (S2)	β_1	-144.0660	41.3126	-3.49	<.0001					
	β_2	38.2038	10.9216	3.50	<.0001					
	β_3	0.7017	0.0501	14.01	<.0001	1.39	0.98	0.63	0.90	1.88
	ρ_1	0.9535	0.0130	73.32	<.0001					
	ρ_2	0.9026	0.0145	62.11	<.0001					
Korf (S3)	β_1	13.1200	*	*	*					
	β_2	34.4232	2.1219	16.22	<.0001					
	β_3	0.4349	0.0532	8.17	<.0001	1.60	0.97	0.40	0.91	1.68
	ρ_1	0.9946	0.0088	112.80	<.0001					
	ρ_2	0.9463	0.0096	97.76	<.0001					

SE: standard error; P >|t|: p-value from the Student's t-distribution, RMSE: root mean square error, R²_{adj}: adjusted coefficient of determination, SICI: site index consistency index, FI: fit index, DW: Durbin-Watson statistic.

EE: error estándar; P >|t|: valor de la probabilidad de la distribución t de Student, RCME: raíz cuadrada media del error, R²_{adj}: coeficiente de determinación ajustado, ICIS: índice de consistencia de índice de sitio, IA: índice de ajuste, DW: estadístico Durbin-Watson.

and Nava-Nava et al. (2020) for *P. patula* also employed S1 and reported values of R²_{adj} > 0.98 and estimation errors below 0.6 m. These results are consistent with those obtained in the present study and can be attributed both to the flexibility of the model under this formulation and to the iterative parameter estimation method used, which is robust and base-age invariant, thereby satisfying the properties of the GADA approach.

On the other hand, S3 showed an acceptable fit, but it was lower than that of S1 and S2. Additionally, the model parameter β_1 was not estimable and was assigned arbitrarily.

To evaluate the graphical behavior of the model fit, families of SI curves were constructed for indices of 15, 20, 25 and 30 m at a reference age of 40 years. The SI families corresponding to solutions S1 and S2 show a logical pattern consistent with the observed trends across the age range (Figure 2). However, both solutions tend to overestimate dominant heights at ages below the base age, possibly due to irregular growth patterns. For example, Figure 2 shows that some trees display very slow height growth at ages lower than or equal to 30 years, which may be considered atypical, as in cases where 30-year-old trees barely reach 10 m in height.

estándar, valor t y la significancia de los parámetros (P >|t|) no se reportan en la plataforma de SiBiFor.

Resultados y discusión

Parámetros y ajuste para *Pinus patula*

Las soluciones S1 y S2 presentaron los mejores resultados; S2 logró el ICIS más alto (0.63) con mayor estabilidad en las predicciones de IS (Cuadro 2). El ajuste con la S1 indica la amplia flexibilidad del modelo cuando se emplea de manera correcta, tal y como se plantea en este estudio. González-Méndez et al. (2017) con *P. pseudostrobus* y Nava-Nava et al. (2020) con *P. patula*, también utilizaron la S1 y obtuvieron valores de R²_{adj} > 0.98 y errores de estimación menores de 0.6 m. Tales resultados son similares a los del presente estudio, lo que se atribuye tanto a la flexibilidad del modelo bajo esta estructura, como al método de ajuste de parámetros empleado (iterativo), el cual es robusto e invariante a la edad de base y con el que se cumplen las propiedades de la DAG.

Por otra parte, la S3 tiene un ajuste aceptable, pero inferior comparado con las S1 y S2. Adicionalmente, el parámetro β_1 del modelo no fue estimable y fue asignado de manera arbitraria.

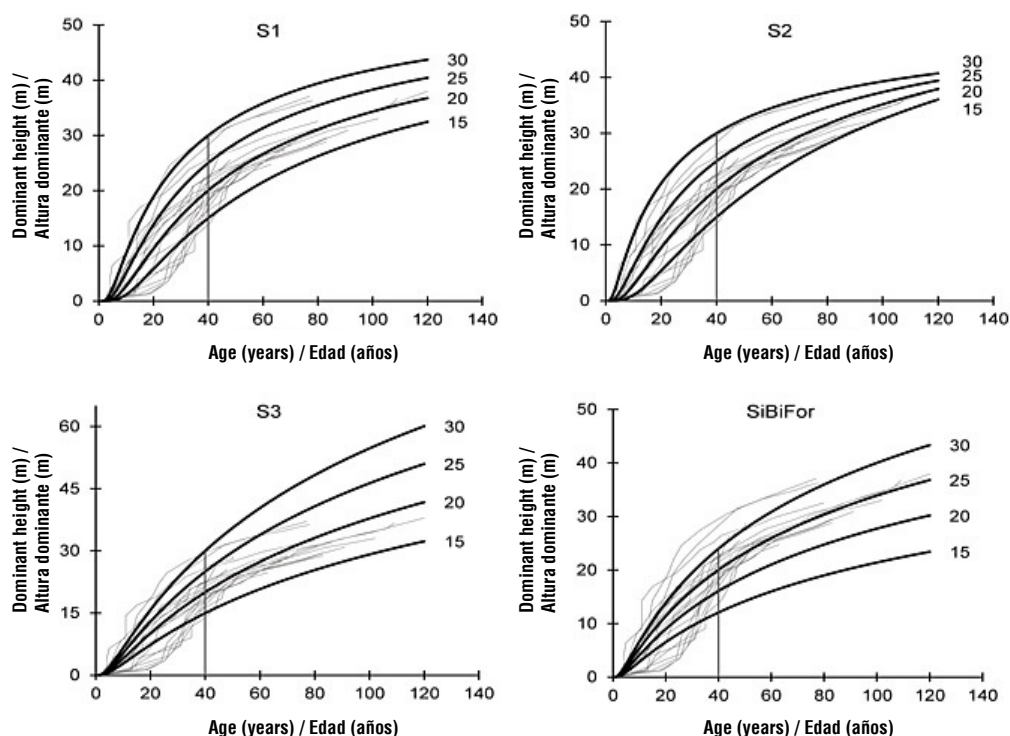


Figure 2. Families of site index curves for *Pinus patula* derived from the three solutions of the Korf model and the model proposed by the Forest Biometric System (SiBiFor) at a reference age of 40 years.

Figura 2. Familias de curvas de calidad de estación para *Pinus patula* derivadas de las tres soluciones del modelo Korf y el propuesto por el Sistema Biométrico Forestal (SiBiFor) a la edad de referencia de 40 años.

Although this behavior is not widespread, it becomes relevant when compared with scenarios from managed stands or forest plantations. Palacios-Cruz et al. (2020) reported average height of 25 m at age 30 in *P. patula* stands managed in Hidalgo, while Hernández-Ramos et al. (2022) documented heights of 20 m at age 20 in commercial forest plantations in Estado de México. These differences suggest that slower growth patterns observed in some individuals may be associated with specific site conditions (e.g., soil type, precipitation regime, and competition), as well as the influence of silvicultural practices that, in managed stands or plantations, promote more rapid development.

For the model fitted by SiBiFor, the following inconsistencies were observed: 1) the graphical results do not reflect the logical growth pattern of the observed dominant heights, because they markedly overestimate heights at ages below 40 years for the lowest site quality (15 m); 2) the curves are not base-age invariant (i.e., they lack the property of transitivity), since, for the 15 m curve, this height is reached at approximately 60 years (a similar pattern occurs for the other curves). Solution S3 suggests a pattern similar to that of an anamorphic model; however, it underestimates heights at ages below the base age and exhibits the greatest overestimation at ages above 60 years.

Para evaluar el comportamiento gráfico del ajuste se construyeron las familias de curvas de IS para índices de 15, 20, 25 y 30 m a la edad de referencia de 40 años. Las familias de IS correspondientes a las soluciones S1 y S2 presentan un patrón lógico sobre la tendencia de las observaciones en el horizonte de las edades (Figura 2). No obstante, ambas soluciones tienden a la sobrestimación de las alturas dominantes en edades menores de la edad base, debido posiblemente a patrones de crecimiento irregulares. Por ejemplo, la Figura 2 muestra que algunos árboles tienen crecimiento muy lento en alturas menores o iguales a 30 años, lo que podría considerarse atípico, como en casos donde los árboles de 30 años apenas alcanzan 10 m de altura. Si bien este comportamiento no es generalizado, resulta relevante al compararlo con escenarios de rodales bajo manejo o en plantaciones forestales. Palacios-Cruz et al. (2020) reportaron alturas promedio de 25 m a los 30 años en rodales de *P. patula*, manejados en Hidalgo, mientras que Hernández-Ramos et al. (2022) señalan crecimientos de 20 m a los 20 años en plantaciones forestales comerciales del Estado de México. Estas diferencias sugieren que los patrones de crecimiento más lentos en algunos individuos pueden estar relacionados con características específicas del sitio (v. g. tipo de suelo, régimen de precipitación y competencia), además de la influencia de prácticas

The difference in the fit of the site index curves to the data between S3 and the SiBiFor model is due to differences in the solution for χ . In both equations, the parameters selected as site productivity-dependent and the growth hypothesis affecting them are the same [$\alpha_1 = \exp^x$, $\alpha_2 = (\beta_1 + \beta_2)/\chi$], as are the dynamic equations [$A_2 = \exp(\chi) \exp(-((\beta_1 + \beta_2)/\chi)/(E_2^{\beta_3}))$]. However, the solution for χ in the SiBiFor function corresponds to S1 derived from the Korf model developed in this study, in which the site-related parameters are $\alpha_1 = \exp^x$ and $\alpha_2 = (\beta_1 + \beta_2)/\chi$. This explains the lack of compliance with the properties of the GADA approach (namely base-age invariance and projection interval invariance) in the model. A similar pattern has been reported by Castillo-López et al. (2013), Galindo-Soto et al. (2017), Hipler et al. (2021) and Quiñonez-Barraza et al. (2015), who, like the SiBiFor model, had satisfactory goodness-of-fit statistics ($R^2_{adj} > 0.97$; estimation errors ranging from 0.32 m a 1.1 m). Nevertheless, good fit statistics alone do not guarantee compliance with GADA properties or the biological realism of projected SI curves (Tamarit-Urías et al. 2022). In this context, unlike the SiBiFor equation, the present study used a functional structure that yielded a statistically robust fit, satisfied GADA properties, and produced biologically realistic SI curves.

Best model selection for *Pinus patula*

Based on the goodness of fit of the models, both S1 and S2 showed similar performance; however, S2 yielded a lower prediction error (1.3 m) and greater consistency in SI estimation at the individual-tree level (0.63). Despite this, the fit index for S2 was slightly lower (0.90) than that of the S1 model (0.93). The curves generated by the S2 equation suggest a pattern that tends toward polymorphism; therefore, the following expression is used to estimate SI:

$$SI = \exp(\chi) \exp(-(-144.066 + 38.2038 \cdot \chi) E_B^{-0.7017})$$

$$\chi = \frac{\ln(A_1) + \frac{-144.066}{E_1^{0.7017}}}{\left(1 - \frac{38.2038}{E_1^{0.7017}}\right)} \quad (\text{Eq. 14})$$

where, E_B = base age (years), E_1 = observed age (years), A_1 = observed dominant height (m).

Model fit for *Pinus ayacahuite*

In this case, as with *P. patula*, the parameter β_1 was held constant in S3 to obtain estimates for β_2 and β_3 . SICI indicates that S2 was the most accurate, with a value of 0.55, while the lowest value was for S3 (0.47). In all three cases, the Durbin-Watson statistics were greater than 1.78, and the fit index was identical, with a value of 0.95 (Table 3). These results are consistent with those

silvícolas que, en rodales manejados o plantaciones, favorecen un desarrollo más acelerado.

Para el caso del modelo ajustado por SiBiFor se observan las siguientes inconsistencias: 1) los resultados gráficos del modelo no plasman el patrón lógico de crecimiento de las alturas dominantes observadas, ya que sobrestiman notablemente las alturas en edades menores de 40 años en el sitio de menor calidad (15 m); 2) las curvas no son invariantes (transitivas) de la edad base, ya que, para la curva de 15 m, la edad a la que se da esta altura es cercana a los 60 años (algo similar ocurre en las otras curvas). La S3 sugiere un patrón similar al modelo anamórfico, pero subestima las alturas en edades menores a la edad base y es el modelo que mayor sobrestima a edades mayores de 60 años.

La diferencia de ajuste de las curvas de calidad de estación a los datos, entre la S3 y el modelo SiBiFor, se debe a que las soluciones para χ difieren entre sí; en ambas ecuaciones, los parámetros seleccionados como dependientes de la productividad de estación y la hipótesis de crecimiento que los afecta son los mismos [$\alpha_1 = \exp^x$, $\alpha_2 = (\beta_1 + \beta_2)/\chi$], así como las ecuaciones dinámicas [$A_2 = \exp(\chi) \exp(-((\beta_1 + \beta_2)/\chi)/(E_2^{\beta_3}))$]. Sin embargo, la solución para χ con la función del SiBiFor corresponde a la S1 derivada del modelo Korf desarrollado en este estudio, donde los parámetros relacionados al sitio son $\alpha_1 = \exp^x$ y $\alpha_2 = (\beta_1 + \beta_2)/\chi$. Esto explica el incumplimiento de las propiedades de la DAG (invarianza a la edad base e intervalo de proyección) en el modelo SiBiFor. El mismo patrón se observa en los estudios reportados por Castillo-López et al. (2013), Galindo-Soto et al. (2017), Hipler et al. (2021) y Quiñonez-Barraza et al. (2015), quienes, al igual que con el modelo de SiBiFor, obtuvieron resultados satisfactorios en los estadísticos de ajuste ($R^2_{adj} > 0.97$; error de estimación entre 0.32 m a 1.1 m). No obstante, los buenos estadísticos de ajuste no garantizan por sí solos el cumplimiento de las propiedades de la DAG ni del realismo biológico de las proyecciones de curvas de IS (Tamarit-Urías et al. 2022). En este contexto, a diferencia de lo observado con la ecuación de SiBiFor, se empleó una estructura funcional que permitió ajustes estadísticamente robustos, el cumplimiento de las propiedades de la DAG y curvas de IS biológicamente realistas.

Selección de mejor modelo para *Pinus patula*

Acorde con la bondad de ajuste de los modelos, tanto la S1 como S2 presentaron valores similares; sin embargo, la S2 obtuvo menor error en las predicciones (1.3 m) y fue más consistente en la estimación de IS por árbol individual (0.63). A pesar de ello, el índice de ajuste de S2 fue ligeramente menor (0.90) que el modelo correspondiente a S1 (0.93). Las curvas generadas con la ecuación S2 sugieren un patrón que tiende al

Table 3. Estimated parameters and goodness-of-fit statistics of the Korf model for *Pinus ayacahuite* with the derived solutions.**Cuadro 3. Parámetros estimados y estadísticos de bondad de ajuste del modelo Korf para *Pinus ayacahuite* con las soluciones derivadas.**

Model/solution/ Modelo/solución	Parameter/ Parámetro	Estimator/ Estimador	SE/ EE	T value/ Valor t	P > t	RMSE/ RCME	R ² _{adj}	SICI/ ICIS	FI/ IA	DW
Korf (S1)	β_1	-2.466E7	1 920 608	-12.84	<.0001					
	β_2	1.4744E8	4.26E-1	3.46E23	<.0001					
	β_3	0.26698	0.04060	6.58	<.0001	1.24	0.98	0.52	0.95	1.80
	ρ_1	0.96992	0.00816	118.89	<.0001					
	ρ_2	0.93255	0.01020	91.49	<.0001					
Korf (S2)	β_1	-31.31260	11.72970	-2.67	<.0001					
	β_2	6.82929	2.52150	2.71	<.0001					
	β_3	0.28352	0.04610	6.15	<.0001	1.22	0.98	0.55	0.95	1.79
	ρ_1	0.96667	0.00839	115.25	<.0001					
	ρ_2	0.92708	0.01120	83.01	<.0001					
Korf (S3)	β_1	12.00000	*	*	*					
	β_2	52.20811	1.47380	35.42	<.0001					
	β_3	0.37858	0.04370	8.66	<.0001	1.23	0.98	0.47	0.95	1.81
	ρ_1	0.96878	0.00877	110.51	<.0001					
	ρ_2	0.93351	0.01100	84.73	<.0001					

SE: standard error; P >|t|: p-value from the Student's t-distribution, RMSE: root mean square error, R²_{adj}: adjusted coefficient of determination, SICI: site index consistency index, FI: fit index, DW: Durbin-Watson statistic.

EE: error estándar; P >|t|: valor de la probabilidad de la distribución t de Student, RCME: raíz cuadrada media del error, R²_{adj}: coeficiente de determinación ajustado, ICIS: índice de consistencia de índice de sitio, IA: índice de ajuste, DW: estadístico Durbin-Watson.

reported by Hirigoyen et al. (2018) and Rojo-Alboreca et al. (2017), who demonstrated that the Korf model (S1 in this study) fitted using the GADA approach, accurately estimates dominant heights for *Pinus halapensis* Miller. and *Eucalyptus globulus* Labill., respectively, with R²_{adj} > 0.96 and estimation errors below 1 m. Under this property specified structure, the function generates reliable and consistent projections of dominant height and SI, highlighting the importance of correct model formulation.

Figure 3 shows the families of SI curves developed (three solutions), along with the model proposed by SiBiFor. The equations corresponding to S1 and S2 produce curves that follow the expected pattern of dominant height growth and provide an optimal fit across the entire age range. The trajectories of the curves obtained with the SiBiFor model and S3 are similar, exhibiting delayed asymptotes and slight overestimation of heights in the 7 m curve at ages below 28 years.

Although the pattern of the curves generated by the SiBiFor model appears adequate for this species, they do not exhibit base-age transitivity or projection interval invariance (key characteristics of the GADA approach)

polimorfismo; por tanto, para estimar el IS se tiene la siguiente expresión:

$$IS = \exp(\chi) \exp(-(-144.066 + 38.2038 \cdot \chi) E_B^{-0.7017})$$

$$\chi = \frac{\ln(A_1) + \frac{-144.066}{E_1^{0.7017}}}{\left(1 - \frac{38.2038}{E_1^{0.7017}}\right)} \quad (\text{Ec. 14})$$

donde, E_B = edad base (años), E₁ = edad observada (años), A₁ = altura dominante observada (m).

Ajuste para *Pinus ayacahuite*

En este caso, y al igual que para *P. patula*, el parámetro β_1 se mantuvo fijo en la S3 para obtener los valores estimados de los parámetros β_2 y β_3 . El ICIS sugiere que la S2 fue la más exacta con un valor de 0.55, mientras que el valor más bajo lo presentó la S3 (0.47). En los tres casos, el estadístico de Durbin-Watson fue mayor de 1.78 y el estadístico del índice de ajuste fue el mismo con un valor de 0.95 (Cuadro 3). Estos resultados se asemejan con los reportados por Hirigoyen et al. (2018) y Rojo-Alboreca et al. (2017), quienes demostraron que el modelo Korf (S1 en este estudio) ajustado mediante DAG estima, de

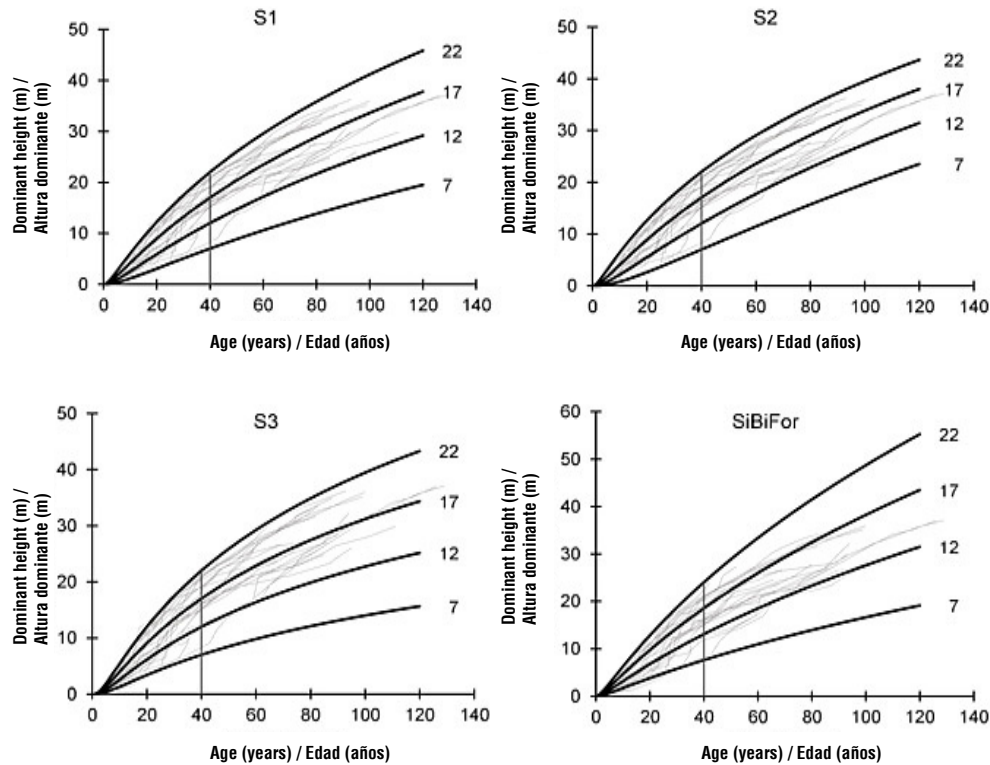


Figure 3. Families of site quality curves for *Pinus ayacahuite* derived from the three solutions of the Korf model and the model proposed by the Forest Biometric System (SiBiFor) at the reference age of 40 years.

Figura 3. Familias de curvas de calidad de estación para *Pinus ayacahuite* derivadas de las tres soluciones del modelo Korf y el propuesto por el Sistema Biométrico Forestal (SiBiFor) a la edad de referencia de 40 años.

Selection of the best model for *Pinus ayacahuite*

The formulation for estimating SI based on S2 is expressed as follows, using the previously defined notation:

$$SI = \exp(\chi) \exp(-(-31.3126 + 6.8293\chi)E_B^{-0.2835})$$

$$\chi = \frac{\ln(A_1) + \frac{-31.3126}{E_1^{0.2835}}}{\left(1 - \frac{6.8293}{E_1^{0.2835}}\right)} \quad (\text{Eq. 15})$$

Model fitting for *Pinus teocote*

In S2 and S3, the parameter β_1 had to be fixed as a constant. S1 showed the best value for the SICI statistic (0.56), while S3 had the lowest score (0.48). Despite these differences, the three models exhibited very similar goodness-of-fit indices, with values of 0.96 for S1 and S2 and 0.95 for S3. None of the three equations showed evidence of autocorrelation, as the values of the Durbin-Watson statistic were very close to 2 (Table 4). Similar results have been reported in studies where the incorporation of autoregressive structures (orders 1 and 2) corrected residual dependence. This has been

manera precisa, las alturas dominantes de *Pinus halapensis* Miller. y *Eucalyptus globulus* Labill., respectivamente, con valores $R^2_{adj} > 0.96$ y errores de estimación menores de 1 m. Dicha función, bajo esta estructura desarrollada correctamente, genera proyecciones confiables y consistentes de altura dominante e IS, lo que destaca la importancia de la formulación correcta del modelo.

Las familias de curvas de IS desarrolladas (tres soluciones) y el modelo propuesto por SiBiFor se observan en la Figura 3. Las ecuaciones correspondientes a las S1 y S2 presentan curvas que siguen el patrón lógico de crecimiento de las alturas dominantes y se ajustan, de manera óptima, en todo el rango de las edades. Las trayectorias de las curvas obtenidas con el modelo SiBiFor y la S3 son similares, las cuales presentan asíntotas tardías y sobrestimación ligera de las alturas en las curvas de 7 m a edades menores de 28 años.

Aunque el patrón de las curvas generadas con el modelo SiBiFor es aparentemente bueno para esta especie, no tiene transividad a la edad de referencia e invarianza al intervalo de proyección (propiedades principales del enfoque en DAG).

Table 4. Estimated parameters and goodness-of-fit statistics of the Korf model for *Pinus teocote* with the derived solutions.**Cuadro 4. Parámetros estimados y estadísticos de bondad de ajuste del modelo Korf para *Pinus teocote* con las soluciones derivadas.**

Model/solution/ Modelo/solución	Parameter/ Parámetro	Estimator/ Estimador	SE/ EE	T value/ Valor t	P > t	RMSE/ RCME	R ² _{adj}	SICI/ ICIS	FI/ IA	DW
Korf (S1)	β_1	-5.384E7	1 296 199	-41.54	<.0001	0.98	0.98	0.56	0.96	2.00
	β_2	2.3599E8	5.9E-16	4E23	<.0001					
	β_3	0.51814	0.0336	15.41	<.0001					
	ρ_1	0.95612	0.0112	85.37	<.0001					
	ρ_2	0.88943	0.0188	47.19	<.0001					
Korf (S2)	β_1	-12.00000	*	*	*	1.12	0.98	0.52	0.96	1.86
	β_2	2.40139	0.1144	20.99	<.0001					
	β_3	0.12139	0.0127	9.59	<.0001					
	ρ_1	0.97693	0.0096	102.15	<.0001					
	ρ_2	0.90287	0.0154	58.46	<.0001					
Korf (S3)	β_1	0.50000	*	*	*	1.05	0.98	0.48	0.95	1.98
	β_2	40.94521	0.7500	54.60	<.0001					
	β_3	0.39536	0.0563	7.02	<.0001					
	ρ_1	0.97079	0.0092	105.34	<.0001					
	ρ_2	0.90538	0.0153	59.14	<.0001					

SE: standard error; P >|t|: p-value from the Student's t-distribution, RMSE: root mean square error, R²_{adj}: adjusted coefficient of determination, SICI: site index consistency index, FI: fit index, DW: Durbin-Watson statistic.

EE: error estándar; P >|t|: valor de la probabilidad de la distribución t de Student, RCME: raíz cuadrada media del error, R²_{adj}: coeficiente de determinación ajustado, ICIS: índice de consistencia de índice de sitio, IA: índice de ajuste, DW: estadístico Durbin-Watson.

reported by Lima dos Santos et al. (2023), who fitted dynamic SI curves for forest plantation of *Tectona grandis* L. f. and found that the use of CAR (1) removed autocorrelation patterns and improved the accuracy of height projections. Correcting autocorrelation is essential in this type of model, because its presence leads to parameter estimates with inflated variance and unreliable prediction intervals; moreover, it invalidates conventional significance test (Quiñonez-Barraza et al., 2018). Therefore, the incorporation of correlation structures, as in this study, ensures unbiased estimators and reliable projections in dynamic growth models.

Figure 4 shows the families of dominant height growth curves generated using the three Korf solutions and the model proposed by SiBiFor for SI 8, 13, 18, 23 and 28 at the reference age of 40 years. It is observed that the three models accurately follow the growth trajectory of dominant heights, unlike the pattern exhibited by the SiBiFor model.

Selection of the best model for *Pinus teocote*

In this case, the equation corresponding to solution S1 represents the trajectories of the curves across the observed dominant heights, showing greater

Selección del mejor modelo para *Pinus ayacahuite*

La formulación para estimar el IS basada en S2 queda de la siguiente manera con la nomenclatura ya definida:

$$IS = \exp(\chi) \exp(-(-31.3126 + 6.8293\chi)E_B^{-0.2835})$$

$$\chi = \frac{\ln(A_1) + \frac{-31.3126}{E_1^{0.2835}}}{\left(1 - \frac{6.8293}{E_1^{0.2835}}\right)} \quad (\text{Ec. 15})$$

Ajuste para *Pinus teocote*

En las S2 y S3 se requirió fijar el parámetro β_1 como constante. La S1 destacó con el mejor valor para el estadístico ICIS (0.56), mientras que la S3 tuvo la calificación más baja (0.48). A pesar de estas variaciones, los tres modelos presentaron índices de ajuste muy similares con 0.96 para las funciones S1 y S2, y 0.95 para la ecuación S3. Las tres ecuaciones no evidencian problemas de autocorrelación, ya que los valores del estadístico Durbin-Watson están muy cercanos a 2 (Cuadro 4). Resultados similares se han informado en estudios donde la incorporación de estructuras autorregresivas (orden 1 y 2) permitieron corregir la dependencia de los residuos. Tal es el caso de Lima dos Santos et al. (2023), quienes

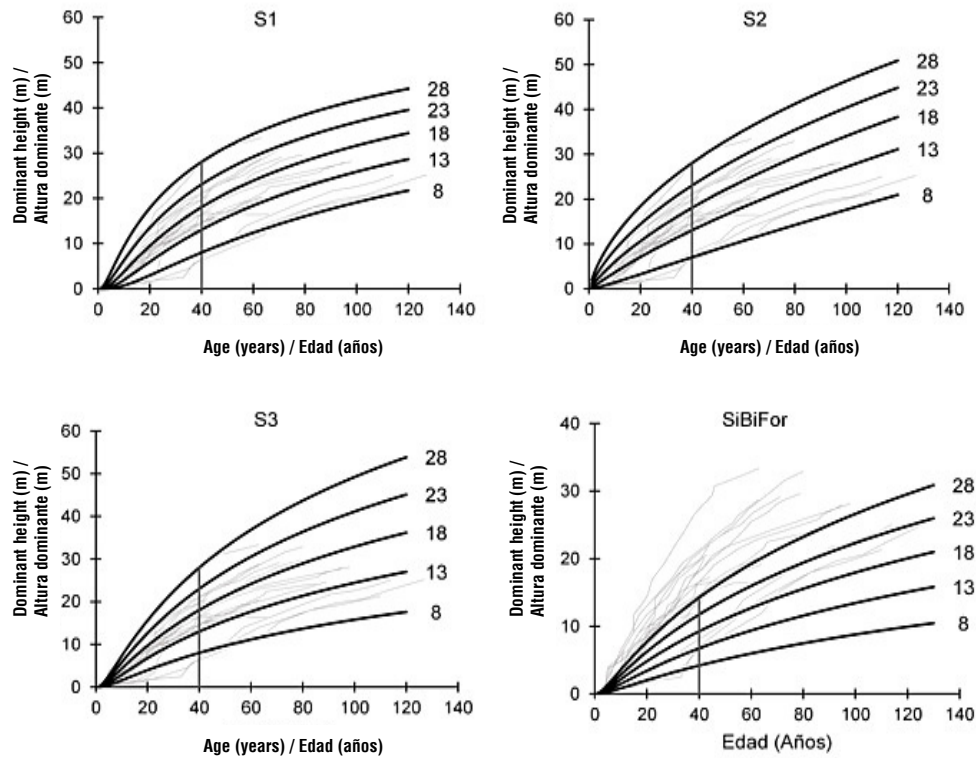


Figure 4. Families of site quality curves for *Pinus teocote* derived from the three solutions of the Korf model and the model proposed by the Forest Biometric System (SiBiFor) at the reference age of 40 years.

Figura 4. Familias de curvas de calidad de estación para *Pinus teocote* derivadas de las tres soluciones del modelo Korf y el propuesto por el Sistema Biométrico Forestal (SiBiFor) a la edad de referencia de 40 años.

consistency in predicting the SI for each tree (SICI = 0.56). In this regard, the flexibility of the model formulated under the GADA approach stands out, as the asymptote is defined as an exponential function of χ , while the growth rate is expressed as an inverse ratio function (S1). Beteta-Montaña et al. (2022) used a formulation equivalent to the base Chapman-Richards model, which allowed them to successfully classify stand productivity of *Pinus oaxacana* Mirov. in natural forests of Oaxaca. Similarly, Collazos-Avendaño et al. (2024) applied an equivalent approach to determine the productivity of *Gmelina arborea* Roxb. Plantations in Colombia. These cases reinforce the idea that the appropriate functional definition of model parameters, beyond the specific model form, is critical for generating reliable SI curves with biological realism. The formulation for estimating SI is as follows:

$$SI = \exp(\chi) \exp\left(-\left(-5.384E7 + \frac{235990000}{\chi}\right) E_B^{-0.5181}\right)$$

$$\chi = \frac{-5.384E7 + E_1^{0.5181} \ln(A_1)}{2E_1^{0.5181}} + \frac{\sqrt{(-(-5.384E7) - E_1^{0.5181} \ln(A_1))^2 + 4 \cdot 235990000 \cdot E_1^{0.5181}}}{2E_1^{0.5181}} \quad (\text{Ec. 16})$$

ajustaron curvas dinámicas de IS para plantaciones forestales de *Tectona grandis* L. f. y encontraron que el uso de CAR(1) eliminó los patrones de autocorrelación y mejoró la precisión en las proyecciones de las alturas. La corrección de la autocorrelación es esencial en este tipo de modelos, ya que su presencia genera estimaciones de parámetros con varianza elevada e intervalos de predicción poco confiables; además, invalida las pruebas de significancia convencionales (Quiñonez-Barraza et al., 2018), por lo que la incorporación de estructuras de correlación, como en este estudio, asegura la obtención de estimadores insesgados y la confiabilidad de las proyecciones en modelos dinámicos de crecimiento.

La Figura 4 exhibe las familias de curvas de crecimiento en altura dominante generadas mediante las tres soluciones de Korf y el modelo propuesto por SiBiFor para los IS 8, 13, 18, 23 y 28 m a la edad de referencia de 40 años. Se observa que los tres modelos siguen de manera precisa la trayectoria de crecimiento de las alturas dominantes, a diferencia de lo mostrado por el modelo SiBiFor.

Selección del mejor modelo para *Pinus teocote*

En este caso, la ecuación correspondiente a la S1 representa adecuadamente las trayectorias de las curvas

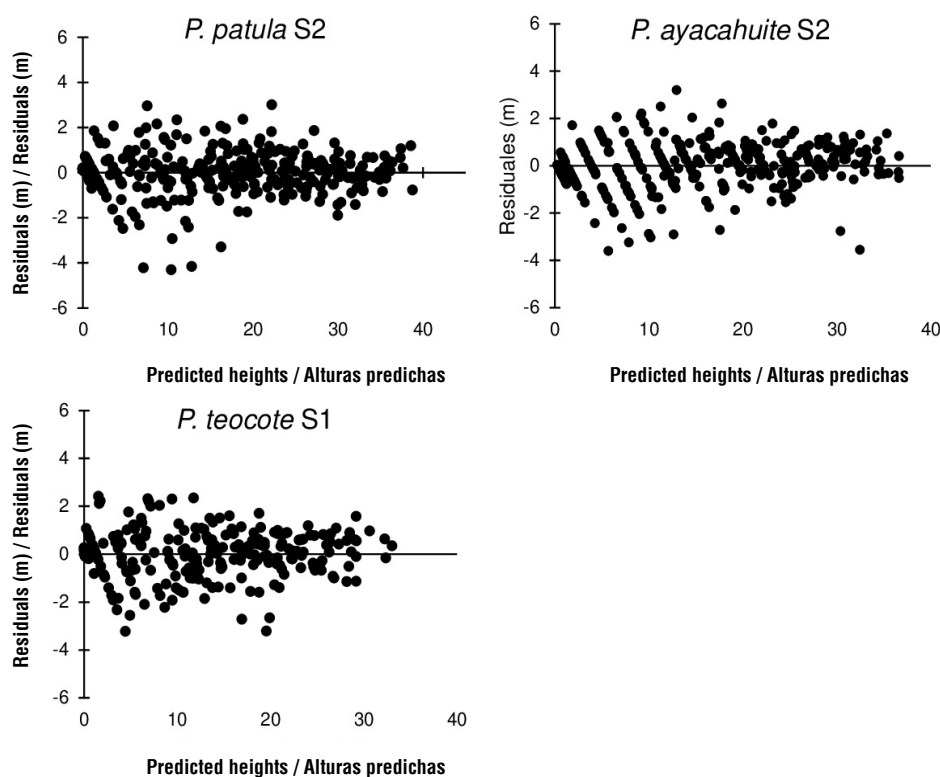


Figure 5. Standardized residuals versus predicted dominant heights obtained from the best solution of the base Korf model for the three species studied in UMAFOR 2108.

Figura 5. Residuos estandarizados frente a las alturas dominantes predichas con las mejores soluciones del modelo base de Korf para las tres especies en estudio de la UMAFOR 2108.

Residual analysis of the tree species

The pattern of standardized residuals plotted against the predicted heights from the models that achieved the best goodness-of-fit statistics for each species (Figure 5) suggests that the error distribution is homogeneous around the zero line, with low dispersion. Therefore, no significant evidence of heteroscedasticity was detected; however, it can be observed that, in all cases, the models tend to predict heights below 20 m with lower accuracy. The residual plot corresponding to the selected models for each species are S2 for *P. patula* and *P. ayacahuite* and S1 for *P. teocote*.

The equations selected in this study for the three species showed satisfactory parameters estimates and fulfill the main properties of the GADA approach; that is, they are invariant to the reference and allow the estimation of dominant height and site quality at any base age and height.

Conclusions

The selected equations, derived from solutions S2, S2 and S1 for the species *P. patula*, *P. ayacahuite* and

sobre las alturas dominantes observadas, siendo más consistente en la predicción de los IS de cada árbol (ICIS = 0.56). En este sentido, resalta la flexibilidad del modelo formulado en DAG, donde la asíntota se define como una función exponencial de χ y la tasa de crecimiento como una función de razón inversa (S1). Beteta-Montaña et al. (2022) emplearon la formulación equivalente al modelo base de Chapman-Richards, con la cual clasificaron adecuadamente la productividad de rodales de *Pinus oaxacana* Mirov. en bosques naturales de Oaxaca, mientras que Collazos-Avendaño et al. (2024) utilizaron un enfoque equivalente para determinar la productividad de plantaciones de *Gmelina arborea* Roxb. en Colombia. Estos casos refuerzan la idea de que la definición funcional correcta de los parámetros, más allá del modelo específico, es determinante para generar curvas de IS confiables y con realismo biológico. La formulación para estimar IS sería:

$$IS = \exp(\chi) \exp\left(-\left(-5.384E7 + \frac{235990000}{\chi}\right) E_B^{-0.5181}\right)$$

$$\chi = \frac{-5.384E7 + E_1^{0.5181} \ln(A_1)}{2E_1^{0.5181}} + \frac{\sqrt{(-(-5.384E7) - E_1^{0.5181} \ln(A_1))^2 + 4 \cdot 235990000 \cdot E_1^{0.5181}}}{2E_1^{0.5181}} \quad (\text{Ec. 16})$$

P. teocote, respectively, showed satisfactory fitting performance, satisfy the properties of the generalized algebraic difference approach, are base-age invariant, and allow the estimation of dominant height and site quality at any base age and height. The results enable an appropriate classification of the productive potential of forest sites and reduce bias in estimating the potential production of pine, thereby contributing to the sustainability of forest in the Sierra Norte de Puebla. Furthermore, the site index consistency index and the goodness-of-fit index, used as complements to traditionally applied statistical criteria, represents useful tools with strong potential for application in future studies of site index curves.

Acknowledgments

The authors thank the Secretaría de Ciencia, Humanidades, Tecnología e Innovación (SECIHTI formerly CONAHCyT) for awarding the scholarship that enabled the first author of this article to pursue their master's studies.

Conflict of Interest Declaration

The authors declare that they have no economic conflicts of interest or known personal relationships that could have influenced the research presented in this article.

Declaration of Artificial Intelligence (AI) Use

The authors declare that no generative AI or AI-assisted technology was used in the preparation of this manuscript.

End of English version

References / Referencias

- Bailey, R. L., & Clutter, J. L. (1974). Base-age invariant polymorphic site curves. *Forest Science*, 20(2), 155-159. <https://doi.org/10.1093/forestsience/20.2.155>
- Barrio-Anta, M., Castedo Dorado, F., Diéguez-Aranda, U., Álvarez González, J. G., Parresol, B. R., & Rodríguez Soalleiro, R. (2006). Development of a basal area growth system for maritime pine in northwestern Spain using the generalized algebraic difference approach. *Canadian Journal of Forest Research*, 36(6), 1461-1474. <https://doi.org/10.1139/x06-028>
- Beteta-Montaña, E., Santiago-García, W., Rodríguez-Ortiz, G., Suárez-Mota, M. E., Aquino-Ramírez, M., Nava-Nava, A., & Ruiz-Aquino, F. (2022). Ajuste y validación de modelos de crecimiento e índices de sitio para *Pinus oaxacana* del sur de México. *Bosque (Valdivia)*, 43(3), 329-346. <http://doi.org/10.4067/S0717-92002022000300331>

Análisis de residuales de las tres especies

El patrón de los residuales estandarizados contra las alturas predichas de los modelos que obtuvieron los mejores estadísticos de bondad de ajuste por especie (Figura 5) sugieren que la distribución de los errores muestra una tendencia homogénea alrededor de la línea cero y poca dispersión. Por tanto, no se detectó evidencia significativa de heterocedasticidad; sin embargo, se aprecia que, en todos los casos, los modelos tienden a predecir las alturas menores de 20 m con menor precisión. Los gráficos de residuales correspondientes a los modelos seleccionados por especie corresponden a S2 para *P. patula* y *P. ayacahuite* y S1 para *P. teocote*.

Las ecuaciones seleccionadas en este estudio, para las tres especies, obtuvieron parámetros de ajuste satisfactorio y cumplen con las propiedades principales de la metodología DAG; es decir, son invariantes a la edad de referencia, estiman la altura dominante y la calidad de estación a cualquier altura y edad base.

Conclusiones

Las ecuaciones seleccionadas, provenientes de las soluciones S2, S2 y S1 para las especies *P. patula*, *P. ayacahuite* y *P. teocote*, respectivamente, obtuvieron parámetros satisfactorios de ajuste, cumplen con las propiedades de la metodología de diferencia algebraica generalizada, son invariantes a la edad de referencia y permiten la estimación de altura dominante y calidad de estación a cualquier altura y edad base. Los resultados permiten la clasificación adecuada del potencial productivo de los sitios forestales y la reducción de los sesgos en la estimación de la producción potencial de pino, que impacta la sostenibilidad de los bosques en la Sierra Norte de Puebla. Por otra parte, el índice de consistencia de índice de sitio y el índice de ajuste, complementarios a los criterios estadísticos usados tradicionalmente, representan una herramienta útil y con potencial de aplicación en futuros estudios de curvas de índices de sitio.

Agradecimientos

A la Secretaría de Ciencia, Humanidades, Tecnología e Innovación (SECIHTI antes CONAHCyT) por la asignación de la beca para realizar los estudios de maestría al primer autor de este artículo.

Declaración de conflicto de intereses

Los autores declaramos que no tenemos conflictos de intereses económicos ni relaciones personales conocidas que pudieran haber influido en el trabajo presentado en este artículo.

- Castillo-López, A., Vargas-Larreta, B., Corral-Rivas, J. J., Nájera Luna, J. A., Cruz-Cobos, F., & Javier Hernández, F. (2013). Modelo compatible altura – Índice de sitio para cuatro especies de pino en Santiago Papasquiaro, Durango. *Revista Mexicana de Ciencias Forestales*, 4(18), 86–103. <https://doi.org/10.29298/rmcf.v4i18.391>
- Ceballos-Pérez, S. G. (2020). Impacto territorial del manejo forestal comunitario en la sierra norte de Puebla, 2003-2017. *Cuadernos de Desarrollo Rural*, 17(86). <https://doi.org/10.11144/Javeriana.cdr17.itmf>
- Cieszewski, C. J., & Bailey, R. L. (2000). Generalized algebraic difference approach: Theory based derivation of dynamic site equations with polymorphism and variable asymptotes. *Forest Science*, 46(1), 116–126. <https://doi.org/10.1093/forestscience/46.1.116>
- Collazos-Avendaño, J. C., Barrios-Trilleras, A., & Diaz-Sierra, D. R. (2024). Modelos de altura dominante para *Gmelina arborea* Roxb. en Colombia. *Colombia Forestal*, 27(1). <https://doi.org/10.14483/2256201x.20569>
- Galindo-Soto, J. E., Vargas-Larreta, B., Hernández, F. J., & Cruz-Cobos, F. (2017). Modelo compatible altura dominante - índice de sitio para mezquite (*Prosopis laevigata* Humb. et Bonpl. ex Willd) del semi-desierto de Durango. *Revista Chapingo Serie Zonas Áridas*, 16(1), 23–31. <https://doi.org/10.5154/r.rchsa.2015.10.16>
- González-Méndez, M., Cruz-Cobos, F., Quiñonez-Barraza, G., Vargas-Larreta, B., & Nájera Luna, J. A. (2017). Modelo de crecimiento en altura dominante para *Pinus pseudostrobus* Lindl. en el estado de Guerrero. *Revista Mexicana de Ciencias Forestales*, 7(37), 7–20. <https://doi.org/10.29298/rmcf.v7i37.48>
- Hernández-Ramos, J., Hernández-Ramos, A., Ordaz-Ruiz, G., García-Espinoza, G. G., García-Magaña, J. J., & García-Cuevas, X. (2022). Índice de sitio para plantaciones forestales de *Pinus patula* en el Estado de México. *Madera y Bosques*, 28(2), e2822308. <https://doi.org/10.21829/myb.2022.2822308>
- Hipler, S.-M., Spiecker, H., & Wu, S. (2021). Dynamic top height growth models for eight native tree species in a cool-temperate region in northeast China. *Forest*, 12(8), 964. <https://doi.org/10.3390/f12080965>
- Hirigoyen, A., Franco, J., & Diéguez, U. (2018). Modelo dinámico de rodal para *Eucalyptus globulus* (L.) en Uruguay. *Agrociencia Uruguay*, 22(1), 63–80. <https://doi.org/10.31285/AGRO.22.1.7>
- Krumland, B., & Eng, H. (2005). *Site index systems for major young-growth forest and woodland species in Northern California*. https://www.fs.usda.gov/rm/pubs/rmrs_gtr292/2005_krumland.pdf
- Lima dos Santos, M., Pereira Miguel, E., Nappo, M. E., de Souza, H. J., Costa dos Santos, C. R., Macedo Silva, J. N., & Trondoli Matricardi, E. A. (2023). Approaches to forest site classification as an indicator of teak volume production. *Forests*, 14(8), 1613. <https://doi.org/10.3390/f14081613>
- López-Becerra, J. L., & Barrón-Sevilla, J. A. (2018). Diversidad de aves en un bosque bajo manejo forestal en la Sierra Norte de Puebla, México. *Huitzil, Revista Mexicana de Ornitología*, 19(2). <https://doi.org/10.28947/hrmo.2018.19.2.338>
- Lundqvist, B. (1957). On the height growth in cultivated stands of pine and spruce in Northern Sweden. *Medd Fran Statens Skogforsk*, 47(2), 1–64
- Nava-Nava, A., Santiago-García, W., Rodríguez-Ortiz, G., De los Santos-Posadas, H. M., Ruiz-Aquino, F., Santiago-García, E., & Suárez-

Declaración del uso de inteligencia artificial (IA)

Los autores declaramos no haber utilizado IA generativa o tecnologías asistidas por IA para el desarrollo del presente manuscrito.

Fin de la versión en español

- Mota, M. E. (2020). Ecuaciones dinámicas de crecimiento en altura dominante e índice de sitio para *Pinus patula* Schiede ex Schltdl. & Cham. *Revista Fitotecnia Mexicana*, 43(4), 470. <https://doi.org/10.35196/rfm.2020.4.470>
- Palacios-Cruz, D. J., De los Santos-Posadas, H. M., Ángeles-Pérez, G., Fierros-González, A. M., & Santiago-García, W. (2020). Sistema de crecimiento y rendimiento para evaluar sumideros de carbono en bosques de *Pinus patula* Schiede ex Schltdl. et Cham. bajo aprovechamiento forestal. *Agrociencia*, 54(2), 241–257. <https://doi.org/10.1016/j.agro.2020.02.005>
- Quiñonez-Barraza, G., De los Santos-Posadas, H. M., Cruz-Cobos, F., Velázquez-Martínez, A., Ángeles-Pérez, G., & Ramírez-Valverde, G. (2015). Índice de sitio con polimorfismo complejo para masas forestales de Durango, México. *Agrociencia*, 49(4), 439–454. <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=30239403007>
- Quiñonez-Barraza, G., García-Espinoza, G. G., & Aguirre-Calderón, O. A. (2018). ¿Cómo corregir la heterocedasticidad y autocorrelación de residuales en modelos de abusamiento y crecimiento en altura? *Revista Mexicana de Ciencias Forestales*, 9(49), 28-59. <https://doi.org/10.29298/rmcf.v9i49.151>
- Rojo-Alboreca, A., Cabanillas-Saldaña, A. M., Barrio-Anta, M., Notivol-Paino, E., & Gorgoso-Varela, J. J. (2017). Site index curves for natural Aleppo pine forests in the central Ebro valley (Spain). *Madera y Bosques*, 23(1), 143–159. <https://doi.org/10.21829/myb.2017.231495>
- Statistical Analysis Software (SAS). (2020). *SAS/ETS 15.2 User's Guide* [software]. https://documentation.sas.com/doc/en/etsug/15.2/etsug_whatsnew_sect001.htm
- Tamarit-Urías, J. C., Quiñonez-Barraza, G., García-Cuevas, X., Hernández-Ramos, J., & Monárrez-González, J. C. (2021). Ecuación dinámica para estimar el crecimiento en diámetro de *Pinus montezumae* Lamb. en Puebla, México. *Madera y Bosques*, 27(3), e2732180. <https://doi.org/10.21829/myb.2021.2732180>
- Tamarit-Urías, J. C., Rodríguez-Acosta, M., Quiñonez-Barraza, G., & Santiago-García, W. (2022). Nueva ecuación dinámica de altura dominante e índice de sitio para *Pinus chiapensis* (Martínez) Andresen en Puebla y Veracruz, México. *Revista Chapingo Serie Ciencias Forestales y del Ambiente*, 28(3), 331-347. <https://doi.org/10.5154/r.rchscfa.2021.05.030>
- Vargas-Larreta, B., Corral-Rivas, J. J., Aguirre-Calderon, O. A., López-Martínez, J. O., De los Santos-Posadas, H. M., Zamudio-Sánchez, F. J., Treviño-Garza, E. J., Martínez-Salvador, M., & Aguirre-Calderón, C. G. (2017). SiBiFor: Forest Biometric System for forest management in Mexico. *Revista Chapingo Serie Ciencias Forestales y del Ambiente*, 23(3), 437–455. <https://doi.org/10.5154/r.rchscfa.2017.06.040>