



## **Actualización de modelos de crecimiento en altura dominante de tres especies de pino en la UMAFOR 2108 en el norte de Puebla**

Título corto: Modelos de crecimiento actualizados (UMAFOR 2108)

Diego A. Gómez-Reyes<sup>1</sup> (<https://orcid.org/0000-0003-3655-6353>)

Héctor M. De los Santos-Posadas<sup>1\*</sup> (<https://orcid.org/0000-0003-4076-5043>)

Arnulfo Aldrete<sup>1</sup> (<https://orcid.org/0000-0002-6995-8490>)

Juan de D. Benavides Solorio<sup>2</sup> (<https://orcid.org/0000-0003-0034-6194>)

<sup>1</sup>Colegio de Postgraduados (COLPOS), Campus Montecillo. Carretera México-Texcoco km 36.5, Montecillo. C. P. 56230. Texcoco de Mora, Estado de México, México.

<sup>2</sup>Instituto Nacional de Investigaciones Forestales Agrícolas y Pecuarias (INIFAP), Campo Experimental Centro-Altos de Jalisco. Interior parque los Colomos s/n, col. Providencia. C. P. 44660. Guadalajara, Jalisco, México.

\*Corresponding author: [hmsantos@colpos.mx](mailto:hmsantos@colpos.mx)

### **Resumen**

**Introducción.** El Sistema Biométrico Forestal para el manejo de los bosques en México (SiBiFor) propone ecuaciones de crecimiento en altura dominante que utilizan la función de Korf mediante el enfoque de diferencia algebraica generalizada (DAG); sin embargo,



se detectó que algunas funciones no cumplen con las propiedades necesarias (transitividad) del enfoque de DAG.

**Objetivo.** Actualizar los modelos de índice de sitio propuestos por SiBiFor para las especies *Pinus patula* Schiede ex Schltdl. & Cham., *Pinus ayacahuite* Ehren ex Schltdl. y *Pinus teocote* Schiede ex Schltdl. & Cham. correspondientes a la UMAFOR 2108.

**Materiales y métodos.** Para lograr una evaluación objetiva se utilizaron los datos originales de análisis troncales de 64 árboles dominantes, recabados por SiBiFor para la UMAFOR en el año 2016. Para modelar el crecimiento en altura dominante y generar las familias de curvas de IS se empleó el modelo base de Korf con el enfoque de DAG. Se analizan y documentan estas correcciones con detalle, dado que se encontraron algunos estudios que usan incorrectamente las soluciones del proceso DAG en el modelo Korf.

**Resultados.** Las ecuaciones corregidas para las tres especies de pino obtuvieron parámetros satisfactorios de ajuste, cumplen con las propiedades de la metodología de DAG, son invariantes a la edad de referencia y permiten estimar la altura dominante y la calidad de estación a cualquier altura y edad base.

**Conclusiones.** La propuesta de actualización y ajuste de los modelos corregidos mejora su precisión para la clasificación de la productividad y la producción maderable de las especies con mayor confiabilidad.

**Palabras clave:** *Pinus patula*, *Pinus ayacahuite*, *Pinus teocote*, diferencia algebraica generalizada, modelo Korf.

Recibido: 16 de abril de 2025

Aceptado: 18 de marzo de 2026

## Introducción



La Unidad de Manejo Forestal (UMAFOR) 2108, ubicada en el norte de Puebla representa la zona de silvicultura y manejo forestal más importante del estado. En esta predomina la vegetación de bosque de pino y destacan las especies *Pinus ayacahuite* Ehren ex Schltldl, *Pinus patula* Schiede ex Schltldl. & Cham., *Pinus pseudostrobus* Lindl, *Pinus teocote* Schiede ex Schltldl. & Cham, *Pinus montezumae* Lamb. y *Pinus leiophylla* Schltldl. & Cham. Para manejar cantidades grandes de datos de volumen maderable y crecimiento de las especies mencionadas, es necesario contar con herramientas silvícolas confiables que ayuden al manejo racional y sostenible de los bosques (Tamarit-Urías et al., 2022). Los modelos de crecimiento en altura dominante e índice de sitio (IS) constituyen una herramienta valiosa para estimar la productividad potencial de los rodales que, a su vez, influyen para determinar el turno técnico, la cosecha final y los tratamientos silvícolas intermedios (Lima dos Santos et al., 2023; Nava-Nava et al., 2020; Palacios-Cruz et al., 2020; Tamarit-Urías et al., 2021). Una propuesta que generó gran número de modelos de crecimiento es el Sistema Biométrico Forestal para el manejo de los bosques en México (SiBiFor). Este sistema cuenta con más de 7 000 modelos matemáticos, entre los que destacan modelos de crecimiento en altura dominante e IS de coníferas de interés comercial para el país (Vargas-Larreta et al., 2017). En el caso específico de la UMAFOR 2108, el SiBiFor propuso una serie de ecuaciones de IS que emplearon el modelo de Korf para las especies más importantes (Lundqvist, 1957), mediante el enfoque de diferencia algebraica generalizada (DAG). La metodología DAG se creó en el año 2000 por C. J. Cieszewski y R. L. Bailey y se ha utilizado ampliamente para la construcción de modelos de IS, ya que genera familias de curvas con polimorfismo asintótico (Beteta-Montaña et al., 2022; Collazos-Avendaño et al., 2024; González-Méndez et al., 2017; Hernández-Ramos et al., 2022). Esta metodología cuenta con dos propiedades fundamentales: invarianza (transitividad) de la edad base e intervalo de proyección (Bailey & Clutter, 1974; Cieszewski & Bailey, 2000).

Después de un análisis de los parámetros de los modelos y una evaluación de datos dasométricos provenientes de predios forestales de la UMAFOR 2108, se detectó que las funciones SiBiFor reportadas no cumplían con las propiedades del enfoque en DAG (transitividad de la edad base). También se encontraron discrepancias de subestimación tanto en los patrones de las familias de IS como en las predicciones de las alturas



dominantes. Por lo anterior, se planteó una revisión detallada y la actualización matemática de todos los modelos de IS reportados para la UMAFOR 2108. Dicha revisión es fundamental para el uso correcto de los modelos, la estimación precisa de las alturas dominantes y, por consiguiente, para una evaluación confiable de la productividad potencial y de la producción maderable, contribuyendo así a la sostenibilidad de los ecosistemas forestales. En tal contexto, el objetivo del presente estudio fue actualizar los modelos de índice de sitio propuestos por el SiBiFor para las especies *P. patula*, *P. ayacahuite* y *P. teocote* correspondientes a la UMAFOR 2108 en la región Sierra Norte de Puebla.

## Materiales y métodos

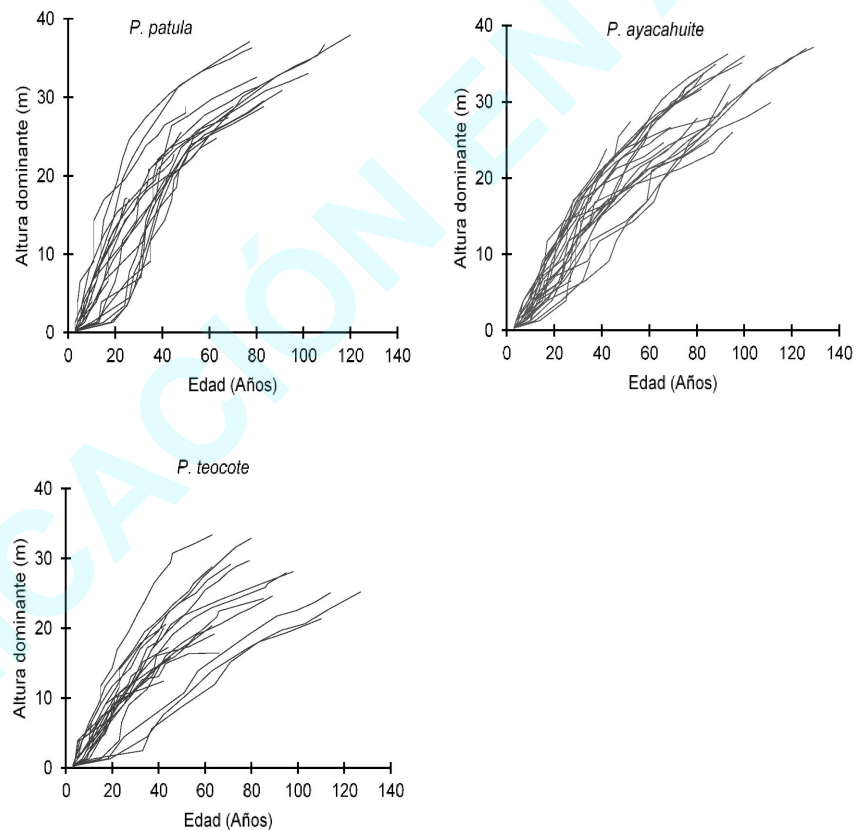
### Área de estudio

El área de estudio se ubica en la región Sierra Norte de Puebla en la UMAFOR 2108 Chignahuapan-Zacatlán, zona de producción forestal más importante del estado, entre las coordenadas geográficas 20° 07' 06" a 19° 44' 18" N y 97° 57' 18" a 97° 38' 42" O. Los climas predominantes son: C (W<sub>1</sub>) (W) templado subhúmedo con lluvias en verano de humedad media, C (m) templado subhúmedo con lluvias abundantes en verano y C (W<sub>2</sub>) templado subhúmedo con lluvias en verano (Ceballos-Pérez, 2020). De los nueve tipos de vegetación que se identificaron en la UMAFOR, una corresponde a bosque de pino que se distribuye por encima de los 2 500 m de elevación y dos más son mezclas de pino y encino. Las especies dominantes en el estrato superior son *Pinus patula*, *P. pseudostrobus*, *P. ayacahuite* y *P. teocote* (López-Becerra & Barrón-Sevilla, 2018).



## Base de datos

Con el fin de lograr comparaciones objetivas se utilizó la base de datos original que el SiBiFor recolectó para la UMAFOR 2108 en 2016. Los datos de edad-altura provienen de análisis troncales de 64 árboles dominantes de tres especies: 20 corresponden a *P. patula*, 20 de *P. teocote* y 24 de *P. ayacahuite*. Las series de crecimiento de estos datos se presentan en la **Figura 1**.



**Figura 1.** Patrón de crecimiento de alturas dominantes de tres especies de pino en la Unidad de Manejo Forestal 2108 Chignahuapan-Zacatlán, Puebla.



## Modelo utilizado

Para modelar el crecimiento en altura dominante y generar las familias de curvas de IS se empleó la ecuación base de Korf (Lundqvist, 1957; Ec. 1) con el enfoque de DAG. Este modelo es muy flexible debido a que puede ajustarse con precisión a varios patrones de crecimiento y conjuntos de datos, sin perder coherencia biológica. Entre sus propiedades destacan la presencia de un punto de inflexión y asíntota horizontal que son características deseables en modelos de crecimiento.

## Enfoque de diferencia algebraica generalizada

La metodología DAG permite la obtención de ecuaciones dinámicas *ad hoc* en función de un modelo base de crecimiento y el cumplimiento de las propiedades de modelos derivados por diferencia algebraica: invarianza (transitividad) a la edad base y al intervalo de proyección (Barrio-Anta et al., 2006). Esta técnica posibilita que más de un parámetro del modelo base dependa de las condiciones del sitio no observables y de difícil medición (tipos de suelo, factores climáticos y regímenes de manejo). Con esto se obtienen familias de curvas polimórficas con múltiples asíntotas de mayor capacidad para ajustarse con precisión a varios conjuntos de datos (Cieszewski & Bailey, 2000).

Los pasos de la metodología DAG se describen a continuación empleando la ecuación 1 (Ec. 1), la cual es objeto principal de este trabajo. Para más detalles de esta metodología consultar Cieszewski y Bailey (2000).



Un aspecto importante en esta metodología es la formulación de varias hipótesis de crecimiento ('paso 2' de cada solución mostrada abajo), entendidas como las funciones que definen la relación del parámetro  $\chi$  con los parámetros del modelo base. Estas hipótesis permiten generar soluciones dinámicas alternativas (S1, S2 y S3), cada una con propiedades específicas en la proyección del crecimiento. La experiencia práctica ha demostrado que asignar a " $\chi$ " funciones simples; por ejemplo, una función lineal inversa  $(\beta_1 + \beta_2 \chi)$  o de razón inversa  $[(\beta_1 + \beta_2 / \chi), \beta_1 / (\chi + \beta_2)]$  es suficiente para lograr modelos altamente robustos (Krumland & Eng, 2005).

### Solución 1 (S1)

Paso 1. Selección de un modelo de crecimiento base, el cual corresponde a la ecuación de Korf (Lundqvist, 1957):

$$A = \alpha_1 \exp(-\alpha_2 E^{-\alpha_3}) \quad (\text{Ec. 1})$$

donde,

A = altura dominante (m),

E = edad (años)

$\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  y  $\alpha_3$  = parámetros del modelo

$\exp$  = función exponencial.

Paso 2. Se identifican los parámetros dependientes de la productividad del sitio y se expresan como funciones de la variable  $\chi$ , de tal forma que se crean nuevos parámetros globales representados con la variable ' $\chi$ ' y ' $\beta$ ' (hipótesis de crecimiento):  $\alpha_1 = \exp(\chi)$ ,  $\alpha_2 = (\beta_1 + \frac{\beta_2}{\chi})$  y  $\alpha_3 = \beta_3$ .

Paso 3. Sustitución de los parámetros en la ecuación base; posteriormente, se expresa en dos estados, de modo que se obtengan dos ecuaciones dinámicas tridimensionales:



$$A_1 = \exp(\chi) \exp\left(-\left(\beta_1 + \frac{\beta_2}{\chi}\right) E_1^{-\beta_3}\right) \quad (\text{Ec. 2}) \quad A_2 = \exp(\chi) \exp\left(-\left(\beta_1 + \frac{\beta_2}{\chi}\right) E_2^{-\beta_3}\right) \quad (\text{Ec. 3})$$

Paso 4. Despeje de  $\chi$  de la Ec. 2 (parámetro que define la hipótesis de crecimiento) con base en las leyes de los exponentes y propiedades de los logaritmos:

$$A_1 = \exp\left(\chi - \left(\beta_1 + \frac{\beta_2}{\chi}\right) E_1^{-\beta_3}\right)$$

$$\ln(A_1) = \ln\left(\exp\left(\chi - \left(\beta_1 + \frac{\beta_2}{\chi}\right) E_1^{-\beta_3}\right)\right)$$

$$\ln(A_1) = \chi - \left(\beta_1 + \frac{\beta_2}{\chi}\right) E_1^{-\beta_3}$$

Se simplifica:

$$\ln(A_1) = \chi - \frac{\beta_1 \chi + \beta_2}{\chi E_1^{\beta_3}}$$

Se multiplica toda la función por  $\chi E_1^{\beta_3}$  y se escribe entonces como  $E_1^{\beta_3} \chi^2 - [\beta_1 + \ln(A_1) E_1^{\beta_3}] \chi - \beta_2 = 0$ . Se resuelve para  $\chi$  con la fórmula general  $ax^2 + bx + c = 0$ .

$$a = E_1^{\beta_3},$$

$$b = -\beta_1 - \ln(A_1) E_1^{\beta_3}$$

$$c = -\beta_2$$

Resultado solución  $\chi$ :

$$\chi = \frac{\beta_1 + E_1^{\beta_3} \ln(A_1) + \sqrt{(-\beta_1 - E_1^{\beta_3} \ln(A_1))^2 + 4\beta_2 E_1^{\beta_3}}}{2E_1^{\beta_3}} \quad (\text{Ec. 4})$$

**Solución 2 (S2)**



Paso 2

$$\alpha_1 = \exp(\chi); \alpha_2 = \exp(\beta_1 + \beta_1\chi); \alpha_3 = \beta_3$$

Paso 3

$$A_1 = \exp(\chi) \exp(-(\beta_1 + \beta_2\chi)E_1^{-\beta_3}) \quad (\text{Ec. 5}) \quad A_2 = \exp(\chi) \exp(-(\beta_1 + \beta_2\chi)E_2^{-\beta_3}) \quad (\text{Ec. 6})$$

Paso 4. Se resuelve  $\chi$  con base en las leyes de los exponentes y propiedades de los logaritmos, a partir de la Ec. 5:

$$A_1 = \exp(\chi - (\beta_1 + \beta_2\chi)E_1^{-\beta_3})$$

$$\ln(A_1) = \ln(\exp(\chi - (\beta_1 + \beta_2\chi)E_1^{-\beta_3}))$$

$$\ln(A_1) = \chi - (\beta_1 + \beta_2\chi)E_1^{-\beta_3}$$

Se factoriza como:

$$\chi(1 - \beta_2 E_1^{-\beta_3}) = \ln(A_1) + \beta_1 E_1^{-\beta_3}$$

Resultado solución  $\chi$ :

$$\chi = \frac{\ln(A_1) + \frac{\beta_1}{E_1^{\beta_3}}}{\left(1 - \frac{\beta_2}{E_1^{\beta_3}}\right)} \quad (\text{Ec. 7})$$

### Solución 3 (S3)

Paso 2

$$\alpha_1 = \exp(\chi); \alpha_2 = (\beta_1 + \beta_2)/\chi; \alpha_3 = \beta_3$$

Paso 3



$$A_1 = \exp(\chi) \exp\left(-\left(\frac{\beta_1 + \beta_2}{\chi}\right) / E_1^{\beta_3}\right) \quad (\text{Ec. 8}) \quad A_2 = \exp(\chi) \exp\left(-\left(\frac{\beta_1 + \beta_2}{\chi}\right) / E_2^{\beta_3}\right) \quad (\text{Ec. 9})$$

Paso 4. Se resuelve  $\chi$  con base en las leyes de los exponentes y propiedades de los logaritmos, a partir de la Ec. 8:

$$\ln(A_1) = \ln \exp\left(\chi - \left(\frac{\beta_1 + \beta_2}{\chi}\right) / E_1^{\beta_3}\right)$$

$$\ln(A_1) = \chi - \frac{(\beta_1 + \beta_2) / \chi}{E_1^{\beta_3}}$$

Se multiplica toda la función por  $\chi$  y se simplifica  $[\ln(A_1)\chi = \chi^2 - \frac{(\beta_1 + \beta_2)}{E_1^{\beta_3}}]$ , se iguala a 0  $[\chi^2 -$

$\ln(A_1)\chi - \frac{(\beta_1 + \beta_2)}{E_1^{\beta_3}} = 0]$  y se resuelve con la fórmula general identificando a, b y c: a = 1, b =

$-\ln(A_1)$ , c =  $-\frac{(\beta_1 + \beta_2)}{E_1^{\beta_3}}$

Resultado solución  $\chi$ :

$$\chi = \frac{\ln(A_1) + \sqrt{4 \frac{(\beta_1 + \beta_2)}{E_1^{\beta_3}} + \ln(A_1)^2}}{2} \quad (\text{Ec. 10})$$

donde,

$A_i$  = altura dominante en el  $i$ -ésimo estado (m)

$E_i$  = edad en el  $i$ -ésimo estado (años)

$\alpha_1, \alpha_2$  y  $\alpha_3$  = parámetros del modelo base

$\beta_1, \beta_2$  y  $\beta_3$  = parámetros globales de la ecuación dinámica

$\chi$  = variable independiente no observable que describe la productividad del sitio.

Castillo-López et al. (2013) ajustaron esta familia de curvas a cuatro especies de pinos en Durango, pero utilizan una expresión de la solución  $\chi$  innecesariamente compleja. Finalmente, se debe mencionar que, al contrastar los patrones de crecimiento, el ajuste realizado por el SiBiFor involucra la Ec. 9 de la S3, pero presentan la solución de  $\chi$  que



corresponde a la S1 (Ec. 4), lo cual repercute en un error. A pesar de ello, el modelo presenta estadísticos de ajuste aceptables, pero no cumple con las propiedades matemáticas de DAG. Este mismo patrón ocurre en el trabajo presentado por Galindo-Soto et al. (2017, pág. 27).

## Estimación de parámetros

Los parámetros del modelo se estimaron con el método iterativo, el cual es una metodología invariante a la edad base, mediante el procedimiento MODEL del programa estadístico SAS/ETS (SAS Institute Inc., 2020). Esta es una técnica eficiente que estima parámetros globales (comunes en todos los árboles) y locales (específicos para cada árbol). Como primer paso se estimaron los parámetros globales de la función dinámica ( $\beta_1, \beta_2$  y  $\beta_3$ ) tomando la condición inicial o parámetro local ( $\hat{A}_1$ ) como constante, el cual es el IS observado para cada árbol. Como segundo paso se utilizan las estimaciones de los parámetros globales como constantes y los valores observados del IS (parámetros locales), para la estimación del IS de cada árbol. Finalmente, en el tercer paso, el IS estimado para cada árbol (parámetro local) se convierte en el nuevo valor del IS observado y los parámetros globales ( $\beta_1, \beta_2$  y  $\beta_3$ ) se obtienen al reajustar el modelo. Este procedimiento se repite hasta que los parámetros globales se estabilizan (Cieszewski & Bailey, 2000). Para corregir la autocorrelación se utilizó un modelo autorregresivo continuo de segundo orden [CAR (2)]. La estructura de la función es la siguiente:

$$e_{ij} = d_1 \rho_1^{t_{ij}-t_{ij-1}} e_{ij-1} + d_2 \rho_2^{t_{ij}-t_{ij-2}} e_{ij-2} + \varepsilon_{ij} \quad (\text{Ec. 11})$$

donde,

$e_{ij}$  =  $i$ -ésimo residuo de la unidad muestral en la  $j$ -ésima medición



$e_{ij-1}$  y  $e_{ij-2}$  = residuales correspondientes a una y dos mediciones previas, respectivamente, dentro de la misma unidad muestral

$d_1 = 1$  para  $j > 1$  y 0 para  $j = 1$

$d_2 = 1$  para  $j > 2$  y 0 para  $j \leq 2$

$\rho_1$  y  $\rho_2$  = parámetros autorregresivos de orden 1 y 2, respectivamente

$t_{ij} - t_{ij-1}$  = distancia temporal que separa la observación  $j^{th}$  de la observación  $j^{th-1}$  en cada análisis troncal

$t_{ij} - t_{ij-2}$  = distancia temporal que separa la observación  $j^{th}$  de la observación  $j^{th-2}$  en cada análisis troncal

$\epsilon_{ij}$  = término del error bajo la condición de independencia.

## Bondad de ajuste del modelo

Los mejores modelos se seleccionaron a partir de comparaciones numéricas y gráficas. En el caso numérico se emplearon estadísticos de ajuste: raíz cuadrada media del error (RCME), coeficiente de determinación ajustado ( $R^2_{Adj}$ ), índice de consistencia de índice de sitio (ICIS) e índice de ajuste. En la parte gráfica se observó el realismo biológico de los datos y el modelo ajustado mediante la comparación de las familias de IS con los patrones de crecimiento observados y el análisis del patrón de los residuales frente a los valores predichos.

## Índice de ajuste e índice de consistencia de índice de sitio (ICIS)



El índice de ajuste (IA) y el ICIS son dos estadísticos de bondad de ajuste que se proponen por primera vez para facilitar la selección entre modelos. El índice de ajuste es una métrica similar al  $R^2$ . Ambos miden la proporción de la varianza explicada por el modelo y, de igual manera, toman valores de 0 y 1. Cuanto el valor sea más cercano a 1, más varianza de la variable dependiente se consigue explicar con la ecuación. La diferencia entre uno y otro radica en que la estimación de la variable dependiente (altura dominante) parte del IS real (última medición de altura-edad) para cada árbol, proyectada con base en el modelo obtenido. Por su parte, el ICIS mide la uniformidad de las estimaciones del IS de un árbol. El ICIS varía de 0 a 1, donde 1 representa total homogeneidad (el IS permanece constante) y valores cercanos a 0 indican alta variabilidad. Este índice se calcula estimando el IS para cada par de observaciones de altura-edad de cada árbol (derivadas del análisis troncal que muestran cómo la altura del árbol evoluciona con la edad). Luego, se redondean estos valores en clases de 1 metro para indicar la precisión del IS. Después, se calcula la diferencia absoluta entre los dos valores consecutivos de IS del árbol y se divide 1 entre este resultado, más la constante de 1. En resumen, cuanto más cercanos estén los valores de IS, mayor será el valor del ICIS, lo que señala mayor uniformidad en las estimaciones. Finalmente, se promedian todos los valores para obtener una calificación global. Ambas expresiones se muestran de la siguiente forma:

$$IA = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (A_{ij} - \hat{A}_{ij})^2}{\sum_{i=1}^n (A_{ij} - \bar{A}_i)^2} \quad (\text{Ec. 12})$$

$$ICIS = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p \frac{(1 + |\hat{I}S_k - \hat{I}S_{k-1}|)^{-1}}{k} \quad (\text{Ec. 13})$$

donde,

$\hat{I}S_k$  = índice de sitio estimado para la  $k$ -ésima observación de altura y edad del  $i$ -ésimo árbol

$\hat{I}S_{k-1}$  = índice de sitio estimado para una segunda observación de altura y edad de ese mismo árbol



$\hat{A}_{ij}$  = valores predichos de la  $j$ -ésima observación del  $i$ -ésimo árbol

$A_i$  = valores observados de la  $j$ -ésima observación del  $i$ -ésimo árbol

$\bar{A}_i$  = media de altura dominante del  $i$ -ésimo árbol.

## Parámetros y ajuste de modelo reportado por SiBiFor

El Cuadro 1 muestra los parámetros del modelo reportado por SiBiFor, así como los estadísticos de bondad de ajuste. Cabe destacar que los valores correspondientes al error estándar, valor  $t$  y la significancia de los parámetros ( $P > [t]$ ) no se reportan en la plataforma de SiBiFor.

**Cuadro 1.** Parámetros y estadísticos de bondad de ajuste del modelo Korf reportados por el Sistema Biométrico Forestal para el manejo de los bosques en México (SiBiFor) en la UMAFOR 2108.

Modelo	Especie	Parámetro	Estimador	EE	Valor $t$	$P > [t]$	RCME	$R^2_{adj}$
Korf SiBiFor	<i>Pinus patula</i>	$\beta_1$	-1.4115	*	*	*	1.64	0.98
		$\beta_2$	38.1176	*	*	*		
		$\beta_3$	0.4354	*	*	*		
Korf SiBiFor	<i>Pinus teocote</i>	$\beta_1$	-2.7768	*	*	*	1.09	0.98
		$\beta_2$	43.8810	*	*	*		
		$\beta_3$	0.3231	*	*	*		
Korf SiBiFor	<i>Pinus ayacahuite</i>	$\beta_1$	0.2099	*	*	*	1.30	0.98
		$\beta_2$	65.5255	*	*	*		
		$\beta_3$	0.1985	*	*	*		

EE: error estándar,  $P > [t]$ : valor de la probabilidad de la distribución  $t$  de Student, RCME: raíz cuadrada media del error,  $R^2_{adj}$ : coeficiente de determinación ajustado. \*Datos no reportados en la base SiBiFor.



## Resultados y discusión

### Parámetros y ajuste para *Pinus patula*

Las soluciones S1 y S2 presentaron los mejores resultados; S2 logró el ICIS más alto (0.63) con mayor estabilidad en las predicciones de IS (Cuadro 2). El ajuste con la S1 indica la amplia flexibilidad del modelo cuando se emplea de manera correcta, tal y como se plantea en este estudio. González-Méndez et al. (2017) con *P. pseudostrobus* y Nava-Nava et al. (2020) con *P. patula*, también utilizaron la S1 y obtuvieron valores de  $R^2_{adj} > 0.98$  y errores de estimación menores de 0.6 m. Tales resultados son similares a los del presente estudio, lo que se atribuye tanto a la flexibilidad del modelo bajo esta estructura, como al método de ajuste de parámetros empleado (iterativo), el cual es robusto e invariante a la edad de base y con el que se cumplen las propiedades de la DAG.

Por otra parte, la S3 tiene un ajuste aceptable, pero inferior comparado con las S1 y S2. Adicionalmente, el parámetro  $\beta_1$  del modelo no fue estimable y fue asignado de manera arbitraria.

**Cuadro 2.** Parámetros estimados y estadísticos de bondad de ajuste del modelo Korf para *Pinus patula* con las soluciones derivadas.

Modelo/ solución	Parámetro	Estimador	EE	Valor t	$P >  t $	RCME	$R^2_{adj}$	ICIS	IA	DW
Korf (S1)	$\beta_1$	-9.41E7	1 468 976	-64.08	<.0001					
	$\beta_2$	3.82E8	2.98E-1	1.28E24	<.0001					
	$\beta_3$	0.7683	0.0498	15.42	<.0001	1.47	0.98	0.56	0.93	1.83
	$\rho_1$	0.9606	0.0120	80.13	<.0001					
	$\rho_2$	0.9104	0.0133	68.70	<.0001					



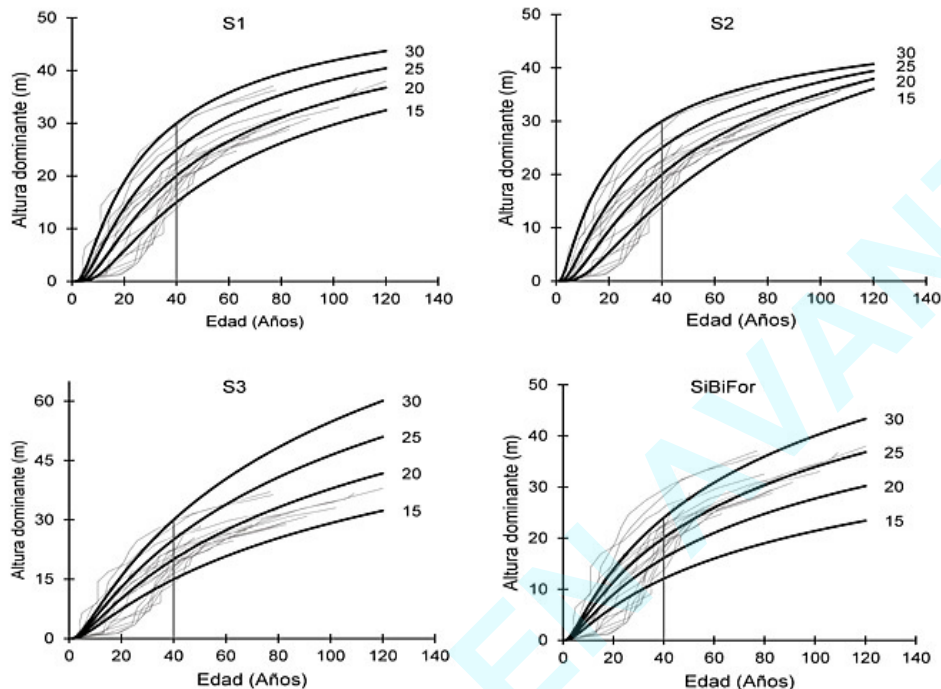
Korf (S2)	$\beta_1$	-144.0660	41.3126	-3.49	<.0001					
	$\beta_2$	38.2038	10.9216	3.50	<.0001					
	$\beta_3$	0.7017	0.0501	14.01	<.0001	1.39	0.98	0.63	0.90	1.88
	$\rho_1$	0.9535	0.0130	73.32	<.0001					
	$\rho_2$	0.9026	0.0145	62.11	<.0001					
Korf (S3)	$\beta_1$	13.1200	*	*	*					
	$\beta_2$	34.4232	2.1219	16.22	<.0001					
	$\beta_3$	0.4349	0.0532	8.17	<.0001	1.60	0.97	0.40	0.91	1.68
	$\rho_1$	0.9946	0.0088	112.80	<.0001					
	$\rho_2$	0.9463	0.0096	97.76	<.0001					

EE: error estándar;  $P > [t]$ : valor de la probabilidad de la distribución  $t$  de Student, RCME: raíz cuadrada media del error,  $R_{adj}^2$ : coeficiente de determinación ajustado, ICIS: índice de consistencia de índice de sitio, DW: estadístico Durbin-Watson.

Para evaluar el comportamiento gráfico del ajuste se construyeron las familias de curvas de IS para índices de 15, 20, 25 y 30 m a la edad de referencia de 40 años. Las familias de IS correspondientes a las soluciones S1 y S2 presentan un patrón lógico sobre la tendencia de las observaciones en el horizonte de las edades (Figura 2). No obstante, ambas soluciones tienden a la sobrestimación de las alturas dominantes en edades menores de la edad base, debido posiblemente a patrones de crecimiento irregulares. Por ejemplo, la Figura 2 muestra que algunos árboles tienen crecimiento muy lento en alturas menores o iguales a 30 años, lo que podría considerarse atípico, como en casos donde los árboles de 30 años apenas alcanzan 10 m de altura. Si bien este comportamiento no es generalizado, resulta relevante al compararlo con escenarios de rodales bajo manejo o en plantaciones forestales. Palacios-Cruz et al. (2020) reportaron alturas promedio de 25 m a los 30 años en rodales de *P. patula*, manejados en Hidalgo, mientras que Hernández-Ramos et al. (2022) señalan crecimientos de 20 m a los 20 años en plantaciones forestales comerciales del Estado de México. Estas diferencias sugieren que los patrones de crecimiento más lentos en algunos individuos pueden estar relacionados con características específicas del sitio (v. g. tipo de suelo, régimen de



precipitación y competencia), además de la influencia de prácticas silvícolas que, en rodales manejados o plantaciones, favorecen un desarrollo más acelerado.



**Figura 2.** Familias de curvas de calidad de estación para *Pinus patula* derivadas de las tres soluciones del modelo Korf y el propuesto por el Sistema Biométrico Forestal (SiBiFor) a la edad de referencia de 40 años.

Para el caso del modelo ajustado por SiBiFor se observan las siguientes inconsistencias: 1) los resultados gráficos del modelo no plasman el patrón lógico de crecimiento de las alturas dominantes observadas, ya que sobrestiman notablemente las alturas en edades menores de 40 años en el sitio de menor calidad (15 m); 2) las curvas no son invariantes (transitivas) de la edad base, ya que, para la curva de 15 m, la edad a la que se da esta altura es cercana a los 60 años (algo similar ocurre en las otras curvas). La S3 sugiere un patrón similar al modelo anamórfico, pero subestima las alturas en edades menores a la edad base y es el modelo que mayor sobrestima a edades mayores de 60 años.

La diferencia de ajuste de las curvas de calidad de estación a los datos, entre la S3 y el modelo SiBiFor, se debe a que las soluciones para  $\chi$  difieren entre sí; en ambas ecuaciones, los parámetros seleccionados como dependientes de la productividad de



estación y la hipótesis de crecimiento que los afecta son los mismos [ $\alpha_1 = \exp^x$ ,  $\alpha_2 = (\beta_1 + \beta_2)/\chi$ ], así como las ecuaciones dinámicas [ $A_2 = \exp(\chi) \exp(-((\beta_1 + \beta_2)/\chi)/(E_2^{\beta_3}))$ ]. Sin embargo, la solución para  $\chi$  con la función del SiBiFor corresponde a la S1 derivada del modelo Korf desarrollado en este estudio, donde los parámetros relacionados al sitio son  $\alpha_1 = \exp^x$  y  $\alpha_2 = (\beta_1 + \beta_2)/\chi$ . Esto explica el incumplimiento de las propiedades de la DAG (invarianza a la edad base e intervalo de proyección) en el modelo SiBiFor. El mismo patrón se observa en los estudios reportados por Castillo-López et al. (2013), Galindo-Soto et al. (2017), Hipler et al. (2021) y Quiñonez-Barraza et al. (2015), quienes, al igual que con el modelo de SiBiFor, obtuvieron resultados satisfactorios en los estadísticos de ajuste ( $R^2_{adj} > 0.97$ ; error de estimación entre 0.32 m a 1.1 m). No obstante, los buenos estadísticos de ajuste no garantizan por sí solos el cumplimiento de las propiedades de la DAG ni del realismo biológico de las proyecciones de curvas de IS (Tamarit-Urías et al. 2022). En este contexto, a diferencia de lo observado con la ecuación de SiBiFor, se empleó una estructura funcional que permitió ajustes estadísticamente robustos, el cumplimiento de las propiedades de la DAG y curvas de IS biológicamente realistas.

### Selección de mejor modelo para *Pinus patula*

Acorde con la bondad de ajuste de los modelos, tanto la S1 como S2 presentaron valores similares; sin embargo, la S2 obtuvo menor error en las predicciones (1.3 m) y fue más consistente en la estimación de IS por árbol individual (0.63). A pesar de ello, el índice de ajuste de S2 fue ligeramente menor (0.90) que el modelo correspondiente a S1 (0.93). Las curvas generadas con la ecuación S2 sugieren un patrón que tiende al polimorfismo; por tanto, para estimar el IS se tiene la siguiente expresión:

$$IS = \exp(\chi) \exp(-(-144.066 + 38.2038 \cdot \chi) E_B^{-0.7017})$$

$$\chi = \frac{\ln(A_1) + \frac{-144.066}{E_1^{0.7017}}}{\left(1 - \frac{38.2038}{E_1^{0.7017}}\right)} \quad (\text{Ec. 14})$$



donde,  $E_B$  = edad base (años),  $E_1$  = edad observada (años),  $A_1$  = altura dominante observada (m).

### Ajuste para *Pinus ayacahuite*

En este caso, y al igual que para *P. patula*, el parámetro  $\beta_1$  se mantuvo fijo en la S3 para obtener los valores estimados de los parámetros  $\beta_2$  y  $\beta_3$ . El ICIS sugiere que la S2 fue la más exacta con un valor de 0.55, mientras que el valor más bajo lo presentó la S3 (0.47). En los tres casos, el estadístico de Durbin-Watson fue mayor de 1.78 y el estadístico del índice de ajuste fue el mismo con un valor de 0.95 (Cuadro 3). Estos resultados se asemejan con los reportados por Hirigoyen et al. (2018) y Rojo-Alboreca et al. (2017), quienes demostraron que el modelo Korf (S1 en este estudio) ajustado mediante DAG estima, de manera precisa, las alturas dominantes de *Pinus halapensis* Miller. y *Eucalyptus globulus* Labill., respectivamente, con valores  $R^2_{adj} > 0.96$  y errores de estimación menores de 1 m. Dicha función, bajo esta estructura desarrollada correctamente, genera proyecciones confiables y consistentes de altura dominante e IS, lo que destaca la importancia de la formulación correcta del modelo.

**Cuadro 3.** Parámetros estimados y estadísticos de bondad de ajuste del modelo Korf para *Pinus ayacahuite* con las soluciones derivadas.

Modelo/ solución	Parámetro	Estimador	EE	Valor $t$	$P >  t $	RCME	$R^2_{adj}$	ICIS	IA	DW
Korf (S1)	$\beta_1$	-2.466E7	1 920 608	-12.84	<.0001					
	$\beta_2$	1.4744E8	4.26E-1	3.46E23	<.0001					
	$\beta_3$	0.26698	0.04060	6.58	<.0001	1.24	0.98	0.52	0.95	1.80
	$\rho_1$	0.96992	0.00816	118.89	<.0001					
	$\rho_2$	0.93255	0.01020	91.49	<.0001					
Korf	$\beta_1$	-31.31260	11.72970	-2.67	<.0001	1.22	0.98	0.55	0.95	1.79

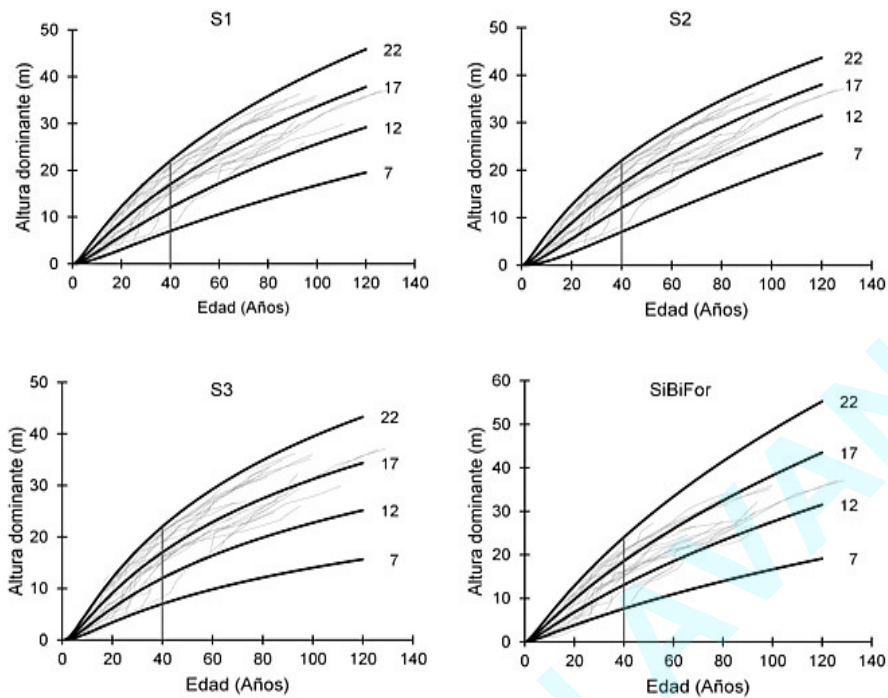


(S2)	$\beta_2$	6.82929	2.52150	2.71	<.0001					
	$\beta_3$	0.28352	0.04610	6.15	<.0001					
	$\rho_1$	0.96667	0.00839	115.25	<.0001					
	$\rho_2$	0.92708	0.01120	83.01	<.0001					
Korf	$\beta_1$	12.00000	*	*	*					
	$\beta_2$	52.20811	1.47380	35.42	<.0001					
	$\beta_3$	0.37858	0.04370	8.66	<.0001	1.23	0.98	0.47	0.95	1.81
	$\rho_1$	0.96878	0.00877	110.51	<.0001					
	$\rho_2$	0.93351	0.01100	84.73	<.0001					

EE: error estándar,  $P > [t]$ : valor de la probabilidad de la distribución  $t$  de Student, RCME: raíz cuadrada media del error,  $R^2_{adj}$ : coeficiente de determinación ajustado, ICIS: índice de consistencia de índice de sitio, DW: estadístico Durbin-Watson.

Las familias de curvas de IS desarrolladas (tres soluciones) y el modelo propuesto por SiBiFor se observan en la **Figura 3**. Las ecuaciones correspondientes a las S1 y S2 presentan curvas que siguen el patrón lógico de crecimiento de las alturas dominantes y se ajustan, de manera óptima, en todo el rango de las edades. Las trayectorias de las curvas obtenidas con el modelo SiBiFor y la S3 son similares, las cuales presentan asíntotas tardías y sobrestimación ligera de las alturas en las curvas de 7 m a edades menores de 28 años.

Aunque el patrón de las curvas generadas con el modelo SiBiFor es aparentemente bueno para esta especie, no se tiene transitividad a la edad de referencia e invarianza al intervalo de proyección (propiedades principales del enfoque en DAG).



**Figura 3.** Familias de curvas de calidad de estación para *Pinus ayacahuite* derivadas de las tres soluciones del modelo Korf y el propuesto por el Sistema Biométrico Forestal (SiBiFor) a la edad de referencia de 40 años.

### Selección del mejor modelo para *Pinus ayacahuite*

La formulación para estimar el IS basada en S2 queda de la siguiente manera con la nomenclatura ya definida:

$$IS = \exp(\chi) \exp(-(-31.3126 + 6.8293\chi)E_B^{-0.2835})$$

$$\chi = \frac{\ln(A_1) + \frac{-31.3126}{E_1^{0.2835}}}{\left(1 - \frac{6.8293}{E_1^{0.2835}}\right)} \quad (\text{Ec. 15})$$



## Ajuste para *Pinus teocote*

En las S2 y S3 se requirió fijar el parámetro  $\beta_1$  como constante. La S1 destacó con el mejor valor para el estadístico ICIS (0.56), mientras que la S3 tuvo la calificación más baja (0.48). A pesar de estas variaciones, los tres modelos presentaron índices de ajuste muy similares con 0.96 para las funciones S1 y S2, y 0.95 para la ecuación S3. Las tres ecuaciones no evidencian problemas de autocorrelación, ya que los valores del estadístico Durbin-Watson están muy cercanos a 2 (Cuadro 4). Resultados similares se han informado en estudios donde la incorporación de estructuras autorregresivas (orden 1 y 2) permitieron corregir la dependencia de los residuos. Tal es el caso de Lima dos Santos et al. (2023), quienes ajustaron curvas dinámicas de IS para plantaciones forestales de *Tectona grandis* L. f. y encontraron que el uso de CAR(1) eliminó los patrones de autocorrelación y mejoró la precisión en las proyecciones de las alturas. La corrección de la autocorrelación es esencial en este tipo de modelos, ya que su presencia genera estimaciones de parámetros con varianza elevada e intervalos de predicción poco confiables; además, invalida las pruebas de significancia convencionales (Quiñonez-Barraza et al., 2018), por lo que la incorporación de estructuras de correlación, como en este estudio, asegura la obtención de estimadores insesgados y la confiabilidad de las proyecciones en modelos dinámicos de crecimiento.

**Cuadro 4.** Parámetros estimados y estadísticos de bondad de ajuste del modelo Korf para *Pinus teocote* con las soluciones derivadas.

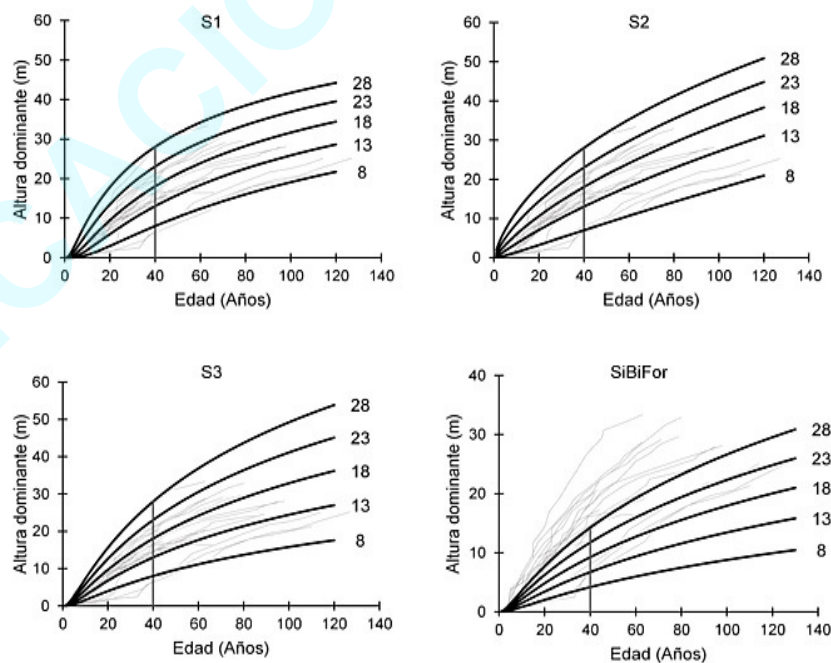
Modelo/ solución	Parámetro	Estimador	EE	Valor t	P >  t	RCME	R <sup>2</sup> <sub>adj</sub>	ICIS	IA	DW
Korf (S1)	$\beta_1$	-5.384E7	1 296 199	-41.54	<.0001	0.98	0.98	0.56	0.96	2.00
	$\beta_2$	2.3599E8	5.9E-16	4E23	<.0001					
	$\beta_3$	0.51814	0.0336	15.41	<.0001					
	$\rho_1$	0.95612	0.0112	85.37	<.0001					
	$\rho_2$	0.88943	0.0188	47.19	<.0001					
Korf	$\beta_1$	-12.00000	*	*	*	1.12	0.98	0.52	0.96	1.86



(S2)	$\beta_2$	2.40139	0.1144	20.99	<.0001					
	$\beta_3$	0.12139	0.0127	9.59	<.0001					
	$\rho_1$	0.97693	0.0096	102.15	<.0001					
	$\rho_2$	0.90287	0.0154	58.46	<.0001					
Korf (S3)	$\beta_1$	0.50000	*	*	*					
	$\beta_2$	40.94521	0.7500	54.60	<.0001					
	$\beta_3$	0.39536	0.0563	7.02	<.0001	1.05	0.98	0.48	0.95	1.98
	$\rho_1$	0.97079	0.0092	105.34	<.0001					
	$\rho_2$	0.90538	0.0153	59.14	<.0001					

EE: error estándar,  $P > [t]$ : valor de la probabilidad de la distribución  $t$  de Student, RCME: raíz cuadrada media del error,  $R^2_{adj}$ : coeficiente de determinación ajustado, ICIS: índice de consistencia de índice de sitio, DW: estadístico Durbin-Watson.

La **Figura 4** exhibe las familias de curvas de crecimiento en altura dominante generadas mediante las tres soluciones de Korf y el modelo propuesto por SiBiFor para los IS 8, 13, 18, 23 y 28 m a la edad de referencia de 40 años. Se observa que los tres modelos siguen de manera precisa la trayectoria de crecimiento de las alturas dominantes, a diferencia de lo mostrado por el modelo SiBiFor.





**Figura 4.** Familias de curvas de calidad de estación para *Pinus teocote* derivadas de las tres soluciones del modelo Korf y el propuesto por el Sistema Biométrico Forestal (SiBiFor) a la edad de referencia de 40 años.

### Selección del mejor modelo para *Pinus teocote*

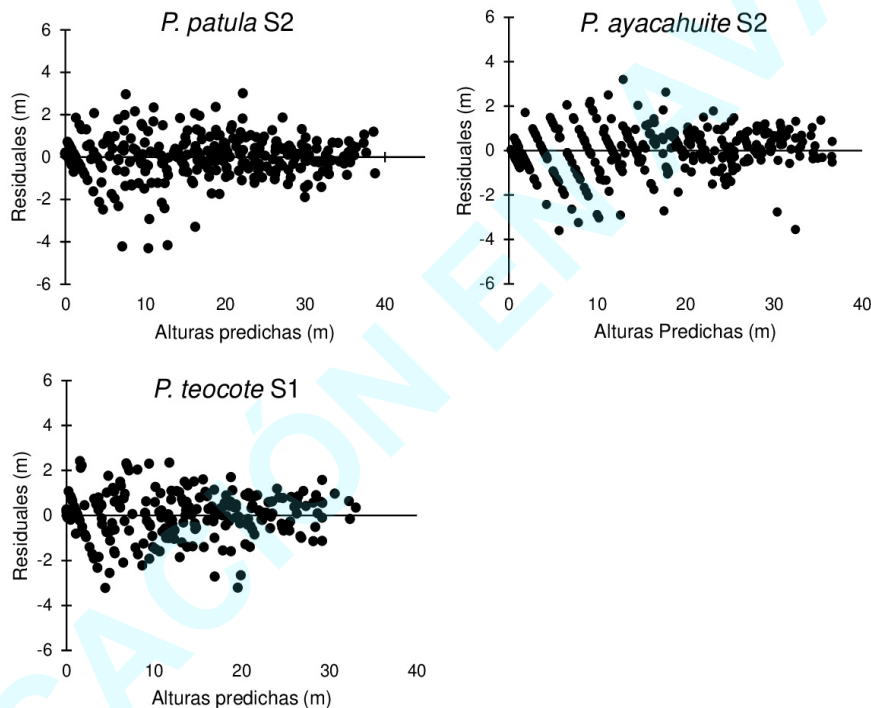
En este caso, la ecuación correspondiente a la S1 representa adecuadamente las trayectorias de las curvas sobre las alturas dominantes observadas, siendo más consistente en la predicción de los IS de cada árbol (ICIS = 0.56). En este sentido, resalta la flexibilidad del modelo formulado en DAG, donde la asíntota se define como una función exponencial de  $\chi$  y la tasa de crecimiento como una función de razón inversa (S1). Beteta-Montaña et al. (2022) emplearon la formulación equivalente al modelo base de Chapman-Richards, con la cual clasificaron adecuadamente la productividad de rodales de *Pinus oaxacana* Mirov. en bosques naturales de Oaxaca, mientras que Collazos-Avendaño et al. (2024) utilizaron un enfoque equivalente para determinar la productividad de plantaciones de *Gmelina arborea* Roxb. en Colombia. Estos casos refuerzan la idea de que la definición funcional correcta de los parámetros, más allá del modelo específico, es determinante para generar curvas de IS confiables y con realismo biológico. La formulación para estimar IS sería:

$$IS = \exp(\chi) \exp\left(-\left(-5.384E7 + \frac{235990000}{\chi}\right) E_B^{-0.5181}\right)$$
$$\chi = \frac{-5.384E7 + E_1^{0.5181} \ln(A_1) + \sqrt{(-5.384E7 - E_1^{0.5181} \ln(A_1))^2 + 4 \cdot 235990000 \cdot E_1^{0.5181}}}{2E_1^{0.5181}} \quad (\text{Ec. 16})$$

### Análisis de residuales de las tres especies



El patrón de los residuales estandarizados contra las alturas predichas de los modelos que obtuvieron los mejores estadísticos de bondad de ajuste por especie (Figura 5) sugieren que la distribución de los errores muestra una tendencia homogénea alrededor de la línea cero y poca dispersión. Por tanto, no se detectó evidencia significativa de heterocedasticidad; sin embargo, se aprecia que, en todos los casos, los modelos tienden a predecir las alturas menores de 20 m con menor precisión. Los gráficos de residuales correspondientes a los modelos seleccionados por especie corresponden a S2 para *P. patula* y *P. ayacahuite* y S1 para *P. teocote*.



**Figura 5.** Residuos estandarizados frente a las alturas dominantes predichas con las mejores soluciones del modelo base de Korf para las tres especies en estudio de la UMAFOR 2108.

Las ecuaciones seleccionadas en este estudio, para las tres especies, obtuvieron parámetros de ajuste satisfactorio y cumplen con las propiedades principales de la metodología DAG; es decir, son invariantes a la edad de referencia, estiman la altura dominante y la calidad de estación a cualquier altura y edad base.



## Conclusiones

Las ecuaciones seleccionadas, provenientes de las soluciones S2, S2 y S1 para las especies *P. patula*, *P. ayacahuite* y *P. teocote*, respectivamente, obtuvieron parámetros satisfactorios de ajuste, cumplen con las propiedades de la metodología de diferencia algebraica generalizada, son invariantes a la edad de referencia y permiten la estimación de altura dominante y calidad de estación a cualquier altura y edad base. Los resultados permiten la clasificación adecuada del potencial productivo de los sitios forestales y la reducción de los sesgos en la estimación de la producción potencial de pino, que impacta la sostenibilidad de los bosques en la Sierra Norte de Puebla. Por otra parte, el índice de consistencia de índice de sitio y el índice de ajuste, complementarios a los criterios estadísticos usados tradicionalmente, representan una herramienta útil y con potencial de aplicación en futuros estudios de curvas de índices de sitio.

## Agradecimientos

A la Secretaría de Ciencia, Humanidades, Tecnología e Innovación (SECIHTI antes CONAHCyT) por la asignación de la beca para realizar los estudios de maestría al primer autor de este artículo.

## Declaración de conflicto de intereses

Los autores declaramos que no tenemos conflictos de intereses económicos ni relaciones personales conocidas que pudieran haber influido en el trabajo presentado en este artículo.



## Declaración del uso de inteligencia artificial (IA)

Los autores declaramos no haber utilizado IA generativa o tecnologías asistidas por IA para el desarrollo del presente manuscrito.

## Referencias

- Bailey, R. L., & Clutter, J. L. (1974). Base-age invariant polymorphic site curves. *Forest Science*, 20(2), 155-159. <https://doi.org/10.1093/forestscience/20.2.155>
- Barrio-Anta, M., Castedo Dorado, F., Diéguez-Aranda, U., Álvarez González, J. G., Parresol, B. R., & Rodríguez Soalleiro, R. (2006). Development of a basal area growth system for maritime pine in northwestern Spain using the generalized algebraic difference approach. *Canadian Journal of Forest Research*, 36(6), 1461–1474. <https://doi.org/10.1139/x06-028>
- Beteta-Montaño, E., Santiago-García, W., Rodríguez-Ortiz, G., Suárez-Mota, M. E., Aquino-Ramírez, M., Nava-Nava, A., & Ruiz-Aquino, F. (2022). Ajuste y validación de modelos de crecimiento e índices de sitio para *Pinus oaxacana* del sur de México. *Bosque (Valdivia)*, 43(3), 329–346. <http://doi.org/10.4067/S0717-92002022000300331>
- Castillo-López, A., Vargas-Larreta, B., Corral-Rivas, J. J., Nájera Luna, J. A., Cruz-Cobos, F., & Javier Hernández, F. (2013). Modelo compatible altura – Índice de sitio para cuatro especies de pino en Santiago Papasquiario, Durango. *Revista Mexicana de Ciencias Forestales*, 4(18), 86–103. <https://doi.org/10.29298/rmcf.v4i18.391>
- Ceballos-Pérez, S. G. (2020). Impacto territorial del manejo forestal comunitario en la sierra norte de Puebla, 2003-2017. *Cuadernos de Desarrollo Rural*, 17(86). <https://doi.org/10.11144/Javeriana.cdr17.itmf>
- Cieszewski, C. J., & Bailey, R. L. (2000). Generalized algebraic difference approach: Theory based derivation of dynamic site equations with polymorphism and variable asymptotes. *Forest Science*, 46(1), 116–126. <https://doi.org/10.1093/forestscience/46.1.116>



- Collazos-Avendaño, J. C., Barrios-Trilleras, A., & Diaz-Sierra, D. R. (2024). Modelos de altura dominante para *Gmelina arborea* Roxb. en Colombia. *Colombia Forestal*, 27(1). <https://doi.org/10.14483/2256201x.20569>
- Galindo-Soto, J. E., Vargas-Larreta, B., Hernández, F. J., & Cruz-Cobos, F. (2017). Modelo compatible altura dominante - índice de sitio para mezquite (*Prosopis laevigata* Humb. et Bonpl. ex Willd) del semi-desierto de Durango. *Revista Chapingo Serie Zonas Áridas*, 16(1), 23–31. <https://doi.org/10.5154/r.rchsza.2015.10.16>
- González-Méndez, M., Cruz-Cobos, F., Quiñonez-Barraza, G., Vargas-Larreta, B., & Nájera Luna, J. A. (2017). Modelo de crecimiento en altura dominante para *Pinus pseudostrobus* Lindl. en el estado de Guerrero. *Revista Mexicana de Ciencias Forestales*, 7(37), 7–20. <https://doi.org/10.29298/rmcf.v7i37.48>
- Hernández-Ramos, J., Hernández-Ramos, A., Ordaz-Ruiz, G., García-Espinoza, G. G., García-Magaña, J. J., & García-Cuevas, X. (2022). Índice de sitio para plantaciones forestales de *Pinus patula* en el Estado de México. *Madera y Bosques*, 28(2), e2822308. <https://doi.org/10.21829/myb.2022.2822308>
- Hipler, S.-M., Spiecker, H., & Wu, S. (2021). Dynamic top height growth models for eight native tree species in a cool-temperate region in northeast China. *Forest*, 12(8), 964. <https://doi.org/10.3390/f12080965>
- Hirigoyen, A., Franco, J., & Diéguez, U. (2018). Modelo dinámico de rodal para *Eucalyptus globulus* (L.) en Uruguay. *Agrociencia Uruguay*, 22(1), 63–80. <https://doi.org/10.31285/AGRO.22.1.7>
- Krumland, B., & Eng, H. (2005). *Site index systems for major young-growth forest and woodland species in Northern California*. [https://www.fs.usda.gov/rm/pubs/rmrs\\_gtr292/2005\\_krumland.pdf](https://www.fs.usda.gov/rm/pubs/rmrs_gtr292/2005_krumland.pdf)
- Lima dos Santos, M., Pereira Miguel, E., Nappo, M. E., de Souza, H. J., Costa dos Santos, C. R., Macedo Silva, J. N., & Trondoli Matricardi, E. A. (2023). Approaches to forest site classification as an indicator of teak volume production. *Forests*, 14(8), 1613. <https://doi.org/10.3390/f14081613>



- López-Becerra, J. L., & Barrón-Sevilla, J. A. (2018). Diversidad de aves en un bosque bajo manejo forestal en la Sierra Norte de Puebla, México. *Huitzil, Revista Mexicana de Ornitología*, 19(2). <https://doi.org/10.28947/hrmo.2018.19.2.338>
- Lundqvist, B. (1957). On the height growth in cultivated stands of pine and spruce in Northern Sweden. *Medd Fran Statens Skogforsk*, 47(2), 1–64
- Nava-Nava, A., Santiago-García, W., Rodríguez-Ortiz, G., De los Santos-Posadas, H. M., Ruiz-Aquino, F., Santiago-García, E., & Suárez-Mota, M. E. (2020). Ecuaciones dinámicas de crecimiento en altura dominante e índice de sitio para *Pinus patula* Schiede ex Schltdl. & Cham. *Revista Fitotecnia Mexicana*, 43(4), 470. <https://doi.org/10.35196/rfm.2020.4.470>
- Palacios-Cruz, D. J., De los Santos-Posadas, H. M., Ángeles-Pérez, G., Fierros-González, A. M., & Santiago-García, W. (2020). Sistema de crecimiento y rendimiento para evaluar sumideros de carbono en bosques de *Pinus patula* Schiede ex Schltdl. et Cham. bajo aprovechamiento forestal. *Agrociencia*, 54(2), 241-257. <https://doi.org/10.1016/j.agro.2020.02.005>
- Quiñonez-Barraza, G., De los Santos-Posadas, H. M., Cruz-Cobos, F., Velázquez-Martínez, A., Ángeles-Pérez, G., & Ramírez-Valverde, G. (2015). Índice de sitio con polimorfismo complejo para masas forestales de Durango, México. *Agrociencia*, 49(4), 439–454. <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=30239403007>
- Quiñonez-Barraza, G., García-Espinoza, G. G., & Aguirre-Calderón, O. A. (2018). ¿Cómo corregir la heterocedasticidad y autocorrelación de residuales en modelos de ahusamiento y crecimiento en altura? *Revista Mexicana de Ciencias Forestales*, 9(49), 28-59. <https://doi.org/10.29298/rmcf.v9i49.151>
- Rojo-Alboreca, A., Cabanillas-Saldaña, A. M., Barrio-Anta, M., Notivol-Paino, E., & Gorgoso-Varela, J. J. (2017). Site index curves for natural Aleppo pine forests in the central Ebro valley (Spain). *Madera y Bosques*, 23(1), 143–159. <https://doi.org/10.21829/myb.2017.231495>
- Statistical Analysis Software (SAS). (2020). *SAS/ETS 15.2 User's Guide* [software]. [https://documentation.sas.com/doc/en/etsug/15.2/etsug\\_whatsnew\\_sect001.htm](https://documentation.sas.com/doc/en/etsug/15.2/etsug_whatsnew_sect001.htm)



- Tamarit-Urías, J. C., Quiñonez-Barraza, G., García-Cuevas, X., Hernández-Ramos, J., & Monárrez-González, J. C. (2021). Ecuación dinámica para estimar el crecimiento en diámetro de *Pinus montezumae* Lamb. en Puebla, México. *Madera y Bosques*, 27(3), e2732180. <https://doi.org/10.21829/myb.2021.2732180>
- Tamarit-Urías, J. C., Rodríguez-Acosta, M., Quiñonez-Barraza, G., & Santiago-García, W. (2022). Nueva ecuación dinámica de altura dominante e índice de sitio para *Pinus chiapensis* (Martínez) Andresen en Puebla y Veracruz, México. *Revista Chapingo Serie Ciencias Forestales y del Ambiente*, 28(3), 331-347. <https://doi.org/10.5154/r.rchscfa.2021.05.030>
- Vargas-Larreta, B., Corral-Rivas, J. J., Aguirre-Calderon, O. A., López-Martínez, J. O., De los Santos-Posadas, H. M., Zamudio-Sánchez, F. J., Treviño-Garza, E. J., Martínez-Salvador, M., & Aguirre-Calderón, C. G. (2017). SiBiFor: Forest Biometric System for forest management in Mexico. *Revista Chapingo Serie Ciencias Forestales y del Ambiente*, 23(3), 437–455. <https://doi.org/10.5154/r.rchscfa.2017.06.040>